هندسه ۳

۱- گزینه «۳» ـ ابتدا وارون ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}5 & -4\\ -6 & 5\end{bmatrix}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}5 & -4\\ -6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -6 & 5\end{bmatrix}$$

اکنون به سادگی می‌توان نوشت:

$$A-A^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & -4\\ -6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 12 & 0\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

۲۰ = مجموع درایه‌ها

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۲- گزینه «۱» ـ از برابری $AB=2I$ نتیجه می‌گیریم $A(\frac{1}{2}B)=I$ پس: $A^{-1}=\frac{1}{2}B$

می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}B=A^{-1}=\frac{1}{6-4}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$$

بنابراین $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$. در نتیجه:

۰ = مجموع درایه‌های B

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۳- گزینه «۲» ـ چون A و $A-I$ وارون یکدیگر هستند، پس:

$$A(A-I)=I \Rightarrow A^2-A=I$$

یعنی $A^2=A+I$. اکنون این برابری را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^4=(A+I)^2=A^2+2A+I=(A+I)+2A+I=3A+2I$$

با مقایسه $A^4=3A+2I$ با $A^4=\alpha A+\beta I$ نتیجه می‌گیریم:

$$\alpha=3 \ ، \ \beta=2$$

بنابراین:

$$\alpha-\beta=3-2=1$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۴- گزینه «۲» ـ می‌دانیم:

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$A\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=5I$$

در نتیجه:

$$A(\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix})=I$$

یعنی:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

در نهایت می‌نویسیم:

A^{-1} مجموع درایه‌های قطر اصلی $=\frac{2+3}{5}=1$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۵- گزینه «۴» ــ با توجه به نمایش هندسیِ دستگاه نتیجه می‌گیریم نقطه $A(۱,۱)$ محل برخورد دو خط است و $\begin{cases}x=۱\\y=۱\end{cases}$ جواب این دستگاه است. در نتیجه:

$$\begin{cases}a+b=۱\\c+d=۴\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ماتریس ضرایب}=a+b+c+d=۵$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ دستگاه معادلات)

۶- گزینه «۲» ــ ابتدا دستگاه را مرتب می‌کنیم:

$$\begin{cases}۴x+my=x-۱\\x+۱=۲y-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x+my=-۱\\x-۲y=-۳\end{cases}$$

شرط این‌که این دستگاه جواب منحصر به فرد باشد آن است که:

$$\begin{vmatrix}۳ & m\\ ۱ & -۲\end{vmatrix}\neq ۰$$

در نتیجه:

$$-۶-m\neq ۰ \Rightarrow m\neq -۶$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ دستگاه معادلات)

۷- گزینه «۳» ــ مقدار دترمینان را به روش ساروس به‌دست می‌آوریم:

$$\left|\begin{matrix}۴ & ۵ & -۲\\ ۱ & ۵ & ۷\\ ۲ & -۱ & ۳\end{matrix}\right|\begin{matrix}۴ & ۵\\ ۱ & ۵\\ ۲ & -۱\end{matrix}$$

$$\begin{aligned}&=(۴\times۵\times۳+۵\times۷\times۲+(-۲)\times۱\times(-۱))\\&-((-۲)\times۵\times۲+۴\times۷\times(-۱)+۵\times۱\times۳)\\&=(۶۰+۷۰+۲)-(-۲۰-۲۸+۱۵)=۱۶۵\end{aligned}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ دترمینان)

۸- گزینه «۳» ــ می‌دانیم $AA^{-۱}=I$، بنابراین می‌نویسیم:

$$A-I=A-AA^{-۱}=A(I-A^{-۱})$$

در نتیجه:

$$|A-I|=|A(I-A^{-۱})|=|A||I-A^{-۱}|$$

با توجه به اطلاعات داده شده در متن سؤال به‌دست می‌آید:

$$۶=۲|I-A^{-۱}|\Rightarrow |I-A^{-۱}|=۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ دترمینان)

۹- گزینه «۳» ــ از $|۲A|=۸$ نتیجه می‌گیریم:

$$۴|A|=۸\Rightarrow |A|=۲$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$|۴A|=۱۶|A|=۳۲$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ دترمینان)

۱۰- گزینه «۲» ــ می‌نویسیم:

$$A+mI=\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m & ۰\\ ۰ & m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+m & ۵\\ ۲ & ۳+m\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$|A+mI|=\begin{vmatrix}۱+m & ۵\\ ۲ & ۳+m\end{vmatrix}=(m+۱)(m+۳)-۱۰$$

چون $|A+mI|=۵$، پس:

$$m^۲+۴m+۳-۱۰=۵\Rightarrow m^۲+۴m-۱۲=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\m=-۶\end{cases}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ دترمینان)

هندسه ۱ و ۲

۱- گزینه «۱» ـ در متوازی‌الاضلاع، اندازه ضلع‌های مقابل با هم برابرند:

$$AD = BC = ۸$$

درمثلث قائم‌الزاویه ADH، اندازه ضلع AH نصف اندازه وتر AD است، پس $A\hat{D}H = ۳۰°$. از طرف دیگر در متوازی‌الاضلاع اندازه زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند:

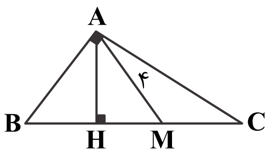
$$B\hat{A}D = \hat{C} = ۱۰۰°$$

اکنون در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$x = ۱۸۰° - (۱۰۰° + ۳۰°) = ۵۰°$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع و مثلث قائم‌الزاویه)

۲- گزینه «۳» ـ می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر نصف اندازه وتر است:



$$BC = ۲AM = ۲ \times ۴ = ۸$$

از طرف دیگر، چون $\hat{B} - \hat{C} = ۶۰°$ و $\hat{B} + \hat{C} = ۹۰°$ پس $\hat{B} = ۷۵°$ و $\hat{C} = ۱۵°$.

یعنی در این مثلث اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازه وتر است:

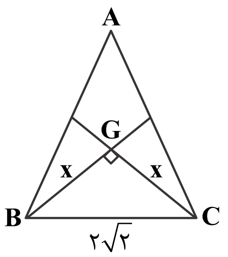
$$AH = \frac{۱}{۴}BC = \frac{۱}{۴} \times ۸ = ۲$$

اکنون به سادگی می‌توان مساحت مثلث را به‌دست آورد:

$$S = \frac{۱}{۲} \times BC \times AH = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۲ = ۸$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه)

۳- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. می‌دانیم $GB = GC$ پس از رابطه فیثاغورس در مثلث BCG به‌دست می‌آید:



$$x^۲ + x^۲ = ۸ \Rightarrow x = ۲$$

پس $S_{BCG} = \frac{۱}{۲}x^۲ = ۲$، در نتیجه:

$$S_{ABC} = ۳S_{BCG} = ۳ \times ۲ = ۶$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ مساحت مثلث ـ ویژگی میانه‌ها)

۴- گزینه «۲» ـ با استفاده از قضیه پیک، اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی باشند:

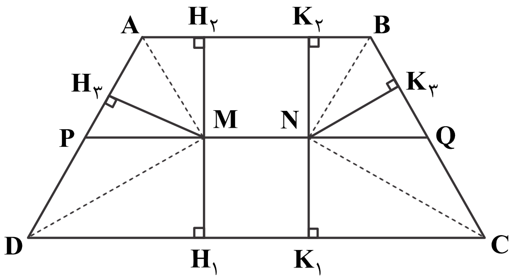
$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱$$

اگر به نقطه‌های مرزی ۴ واحد اضافه کنیم و مساحت را با S' نشان بدهیم، به‌دست می‌آید:

$$S' = \frac{b+۴}{۲} + i - ۱ = \frac{b}{۲} + ۲ + i - ۱ = (\frac{b}{۲} + i - ۱) + ۲ = S + ۲$$

یعنی به مقدار مساحت این چندضلعی ۲ واحد اضافه می‌شود. (هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ قضیه پیک)

۵- گزینه «۱» ــ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از ضلع‌های آن زاویه به یک فاصله است:



$$\left.\begin{array}{l} M \text{ روی نیمساز زاویه } A \Rightarrow MH_2 = MH_3 \\ M \text{ روی نیمساز زاویه } D \Rightarrow MH_1 = MH_3 \end{array}\right\} \Rightarrow MH_1 = MH_2$$

$$\left.\begin{array}{l} N \text{ روی نیمساز زاویه } B \Rightarrow NK_2 = NK_3 \\ N \text{ روی نیمساز زاویه } C \Rightarrow NK_1 = NK_3 \end{array}\right\} \Rightarrow NK_1 = NK_2$$

بنابراین توجه کنید که امتداد MN موازی قاعده‌ها است و از وسط ساق‌ها می‌گذرد، یعنی PQ میان خط (خط میانگین) ذوزنقه است و:

$$PQ = \frac{AB + CD}{۲} = \frac{۶ + ۸}{۲} = ۷$$

(هویدی) (پایه دهم ــ فصل سوم ــ درس دوم ــ ویژگی‌های ذوزنقه)