هندسه

۱- گزینه «۱» ـ چون $I-3A$ و $I+mA$ وارون یکدیگر هستند، پس:

$$(I-3A)(I+mA)=I \Rightarrow I+mA-3A-3mA^2=I \xrightarrow{A^2=4A} I+mA-3A-12mA=I \Rightarrow (-11m-3)A=\bar{O}$$

چون $A\neq\bar{O}$، پس $-11m-3=0$؛ یعنی $m=-\frac{3}{11}$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ وارون) (متوسط)

۲- گزینه «۲» ـ می‌توان نوشت:

$$|I+BA^{-1}|=|AA^{-1}+BA^{-1}|=|A+B||A^{-1}|=|A+B|\times\frac{1}{|A|}=28\times\frac{1}{4}=7$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ دترمینان ـ وارون ماتریس) (دشوار)

۳- گزینه «۲» ـ با توجه به اتحادهای جبری:

$$(A+B)^2-(A-B)^2=4AB \Rightarrow (A+B)^2-I^2=4I \Rightarrow (A+B)^2=5I$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$(A+B)(A^3+B^3)=(A+B)(A+B)(A^2+B^2-AB)=(A+B)^2((A+B)^2-2AB-AB)$$

$$=(A+B)^2((A+B)^2-3AB)=5I(5I-3I)=5I\times 2I=10I=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس داده شده برابر $20=10+10$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ وارون ماتریس) (دشوار)

۴- گزینه «۴» ـ چون $(A^{-1})^{-1}=A$، پس:

$$A=(A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6-4}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$A+A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -1 & \frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

یعنی درایه سطر دوم، ستون دوم $A+A^{-1}$ برابر ۳/۵ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ماتریس وارون) (آسان)

۵- گزینه «۱» ـ ابتدا معادله‌ها را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{cases}4x-my=8\\ mx-y=2m\end{cases}$$

شرط بدون جواب بودن دستگاه: $\frac{4}{m}=\frac{-m}{-1}\neq\frac{8}{2m} \Rightarrow \begin{cases}m=2\\ \text{یا}\\ m=-2\end{cases}$

چون به‌ازای هر دو مقدار به‌دست آمده هر سه تناسب برابرند، پس هیچ مقداری برای m به‌دست نمی‌آید که به‌ازای آن دستگاه جواب نداشته باشد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ دستگاه معادلات) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ـ می‌توان نوشت:

$$|AB|=|(AB)^{-1}| \Rightarrow |AB|=\frac{1}{|AB|} \Rightarrow |AB|^2=1 \Rightarrow |AB|=\pm1 \Rightarrow |A||B|=\pm1 \Rightarrow (x^2-1-2x)(3-2)=\pm1$$

$$\Rightarrow x^2-2x-1=\pm1 \Rightarrow \begin{cases}x^2-2x-2=0 \Rightarrow S_1=2\\ x^2-2x=0 \Rightarrow S_2=2\end{cases}$$

در نتیجه مجموع مقادیر ممکن برای x برابر $S_1+S_2=2+2=4$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ وارون ـ دترمینان) (متوسط)

۷- گزینه «۴» ـ ابتدا $|A|$ را به‌دست می‌آوریم:

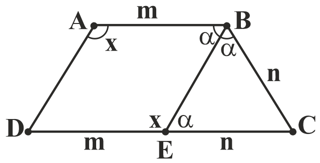
$$\text{بسط حول سطر سوم}: |A| = 1\begin{vmatrix} 2a & 3 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 4a - 3a = a$$

بنابراین:

$$a^4 = 25 \Rightarrow a = \pm\sqrt{5}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ دترمینان و ویژگی‌های آن) (آسان)

۸- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم که در آن از B موازی AD رسم کرده‌ایم تا DC را در نقطه E قطع کند. می‌توان نوشت:



$$AB + BC = DC \Rightarrow AB + BC = DE + EC$$

$$\xrightarrow{AB=DE} BC = EC \Rightarrow \text{مثلث } BCE \text{ متساوی‌الساقین است.} \Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{CEB} = \alpha$$

از طرف دیگر $AB \parallel CD$ و BE مورب است، پس:

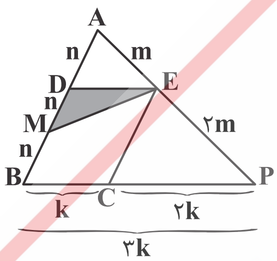
$$\widehat{EBA} = \widehat{BEC} = \alpha$$

چون $\widehat{ABC} = 110^\circ$، پس $2\alpha = 110^\circ$؛ یعنی $\alpha = 55^\circ$، در نتیجه:

$$x = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس ۱ ـ ویژگی‌های ذوزنقه ـ متوازی‌الاضلاع) (دشوار)

۹- گزینه «۲» ـ از تناسب $\frac{PC}{PB} = \frac{2}{3}$ و موازی بودن ضلع‌های متوازی‌الاضلاع و با توجه به قضیه تالس نسبت‌های مشخص شده روی شکل به‌دست می‌آید.



در مثلث EAM، ED میانه است، پس:

$$S_{EDM} = S_{AED}$$

از طرف دیگر $\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABP}$ و نسبت تشابه $\frac{1}{3}$ است، پس:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABP}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{S_{EDM}}{S_{ABP}} = \frac{1}{9}$$

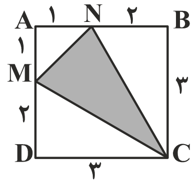
(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس ۲ ـ مساحت ـ تالس ـ ویژگی میانه‌ها) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» ـ می‌دانیم در هر مثلث نسبت ارتفاع‌های مثلث با معکوس اضلاع نظیر آن ارتفاع‌ها برابر است. اکنون به‌دست می‌آید:

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_b} = \frac{b}{a} + \frac{b}{c} = \frac{6}{4} + \frac{6}{8} = \frac{12+6}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

(آزاد ـ ۸۱) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس ۲ ـ مساحت مثلث) (آسان)

۱۱- گزینه «۳» ـ بدون این‌که کلیت مسئله تغییر کند، طول ضلع مربع را ۳ در نظر می‌گیریم و با توجه به تناسب داده شده اندازه‌های روی شکل به‌دست می‌آید. اکنون می‌توان با کم کردن مثلث‌های کناری از مساحت مربع، مساحت مثلث MNC را به‌دست آورد:



$$S_{MNC} = S_{\text{مربع}} - (S_{NBC} + S_{MCD} + S_{AMN}) = ۹ - (\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۳ + \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۳ + \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱)$$

$$= ۹ - (۳ + ۳ + \frac{۱}{۲}) = ۹ - \frac{۱۳}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

بنابراین پاسخ برابر است با:

$$\frac{S_{\text{مربع}}}{S_{MNC}} = \frac{۹}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۱۸}{۵}$$

(کنکور آزاد ـ ۹۰) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس ۲ ـ مساحت مثلث) (آسان)

۱۲- گزینه «۲» ـ اگر b و i به‌ترتیب نقاط مرزی و نقاط درونی باشند، می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{بنابر قضیه پیک}: & S = \frac{b}{۲} + i - ۱ \\ \text{بنابر فرض مسئله}: & S = \frac{b+i}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{b}{۲} + \frac{i}{۲} \Rightarrow \frac{i}{۲} = ۱ \Rightarrow i = ۲$$

چون می‌خواهیم مقدار مساحت می‌نیمم باشد، باید b می‌نیمم باشد. می‌دانیم:

$$b_{min} = ۳$$

در نتیجه:

$$S_{min} = \frac{b_{min}}{۲} + i - ۱ = \frac{۳}{۲} + ۲ - ۱ = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس ۲ ـ قضیه پیک) (آسان)