

## ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» - ابتدا معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$yx + 3y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x+3}$$

برای این که مختصات نقطه روی این منحنی صحیح باشد، باید  $x+3 \mid 2x+1$  به دست می‌آید:

$$\left. \begin{array}{l} x+3 \mid 2x+1 \\ x+3 \mid x+3 \Rightarrow x+3 \mid 2x+6 \end{array} \right\} \Rightarrow x+3 \mid (2x+6) - (2x+1) \Rightarrow x+3 \mid 5$$

در نتیجه:

$$x+3 = \pm 1 \text{ یا } \pm 5 \Rightarrow x = -2 \text{ یا } -4 \text{ یا } 2 \text{ یا } -4$$

یعنی ۴ نقطه با مختصات صحیح روی این منحنی قرار دارد. (کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس دوم - بخش پذیری)

۲- گزینه «۳» - می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a \mid a^2 + 2 \\ 3a \mid 2a \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a \mid 3a^2 + 6 \\ 3a \mid 3a^2 \end{array} \right. \Rightarrow 3a \mid (3a^2 + 6) - 3a^2$$

یعنی  $3a \mid 6$  پس  $a \mid 2$ ، در نتیجه:

$$a \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس دوم - بخش پذیری)

۳- گزینه «۱» - از  $ab \mid (a+1)c$  نتیجه می‌گیریم  $a \mid (a+1)c$ .

می‌دانیم دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول هستند، یعنی  $(a, a+1) = 1$ .

بنابراین از  $a \mid (a+1)c$  و  $(a, a+1) = 1$  نتیجه می‌گیریم  $a \mid c$ .

اکنون از  $a \mid c$  نتیجه می‌گیریم  $a \mid c^2$ ، بنابراین  $(a, c^2) = a$ . (هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس دوم - بخش پذیری - ب.م.م.)

۴- گزینه «۱» - فرض کنید  $d \mid (5p-7)$ ،  $d \mid 7$ ،  $d \mid 5p-7$  می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 5p-7 \\ d \mid 7 \end{array} \right\} \Rightarrow d \mid 5p - (5p-7) \Rightarrow d \mid 7$$

یعنی  $d = 1$  یا  $d = 7$ ، اما چون عددی اول و بزرگ‌تر از ۱۰ است، نتیجه می‌گیریم رابطه  $d \mid 7$  به ازای  $d = 7$  برقرار نیست، بنابراین  $d = 1$ .

(هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس دوم - اعداد اول - ب.م.م.)

۵- گزینه «۳» - بنا بر الگوریتم تقسیم  $a = bq + r$ ، همچنین از فرض مسئله به دست می‌آید:

$$r = b - 1, \quad a = 14r$$

به دست می‌آید:

$$14(b-1) = bq + b - 1 \Rightarrow 13b - bq = 13 \Rightarrow (13-q) \times b = 13$$

اگر  $13 - q = 13$ ، نتیجه می‌گیریم  $q = 0$  در نتیجه  $a = r$  و با فرض مسئله  $(a = 14r)$  در تناقض است. پس  $13 - q = 1$  و  $b = 13$ .

از  $r = b - 1 = 12$  به دست می‌آید  $r = 12$ . در نهایت:

$$a = 14r = 14 \times 12 = 168$$

(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس دوم - الگوریتم تقسیم)

۶- گزینه «۲» - چون  $a$  عددی فرد است، پس  $a + 4$  هم عددی فرد است و از  $b \mid a + 4$  نتیجه می‌گیریم  $b$  هم فرد است. چون  $a$  و  $b$  هر دو فرد

هستند پس مربع آن‌ها به قُرم زیر هستند:

$$a^2 = 8t + 1, \quad b^2 = 8t' + 1$$

اکنون می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} 3a^2 + 5b^2 + 9 &= 3(8t+1) + 5(8t'+1) + 9 = 3 \times 8t + 3 + 5 \times 8t' + 5 + 9 \\ &= 3 \times 8t + 5 \times 8t' + 16 + 1 = 8(3t + 5t' + 2) + 1 = 8q + 1 \end{aligned}$$

بنابراین باقیمانده  $3a^2 + 5b^2 + 9$  بر ۸ برابر ۱ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس دوم - افراز مجموعه  $\mathbb{Z}$ )

۷- گزینه «۱» - ابتدا دو طرف رابطه هم‌نهشتی را به ۸ تقسیم می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 12 \\ 8a \equiv 64 \\ (8, 12) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \\ a \equiv 8 \\ 8 \equiv 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \\ a \equiv 2 \\ 2 \equiv -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv -1$$

در نتیجه:  $a = 3k - 1$ . (کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس سوم - مفهوم هم‌نهشتی)

۸- گزینه «۲» - دو طرف رابطه  $7a \equiv 35$  را به عدد ۷ ساده می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 12 \\ 7a \equiv 35 \\ (7, 12) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv 5$$

چون ۶۱۲ پس:

$$\left. \begin{array}{l} 6 \\ a \equiv 5 \\ 5 \equiv -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv -1$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^2 \equiv 1$$

دو طرف این رابطه را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$4a^2 \equiv 4$$

به دو طرف این رابطه ۱۱ واحد اضافه می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 6 \\ 4a^2 + 11 \equiv 15 \\ 15 \equiv 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a^2 + 11 \equiv 3$$

در نتیجه باقی‌مانده  $4a^2 + 11$  بر ۶ برابر ۳ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس سوم - مفهوم هم‌نهشتی)

۹- گزینه «۳» - ابتدا توجه کنید که:

$$2^6 = 16 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2^8 \equiv 1$$

چون  $2^8 \equiv 1$  و مسئله از ما  $2^{91340}$  به پیمانه ۱۷ را می‌خواهد، پس باید باقیمانده  $9^{1340}$  را بر ۸ به دست آوریم:

$$9^{1340} \equiv 1^{1340} = 1 \Rightarrow 9^{1340} = 8q + 1$$

اکنون می‌نویسیم:

$$2^{9^{1340}} \equiv 2^{8q+1} \equiv (2^8)^q \times 2 \equiv 1^q \times 2 \equiv 2$$

یعنی باقیمانده تقسیم  $2^{9^{1340}}$  بر ۱۷ برابر ۲ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس سوم - کاربرد هم‌نهشتی (به دست آوردن باقیمانده))

۱۰- گزینه «۲» - توجه کنید که عبارت هم‌نهشتی داده شده را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$a^m \equiv 7a - 6 \Rightarrow a^m - 1 \equiv 7a - 7 \Rightarrow (a-1)(a+1) \equiv 7(a-1)$$

دو طرف هم‌نهشتی را به  $a-1$  ساده می‌کنیم:

$$a+1 \equiv 7 \Rightarrow a \equiv 6$$

در نهایت به دست می‌آید:

$$2a + 3 \equiv 2 \times 6 + 3 \equiv 12 + 3 \equiv 15$$

چون  $m \geq 20$  پس باقیمانده تقسیم عدد  $2a + 3$  بر  $m$  برابر ۱۵ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس سوم - تقسیم کردن دو طرف رابطه هم‌نهشتی)

۱۱- گزینه «۴» - چون  $8 - 5a$  و  $10 - 6a$  دارای رقم یکسان یکسان هستند، پس به پیمانه ۱۰ هم‌نهشت هستند:

$$6a - 10 \equiv 5a - 8 \Rightarrow 6a - 5a \equiv -8 \Rightarrow a \equiv -8 + 10 = 2$$

اکنون می‌نویسیم:

$$9a + 6 \equiv 9 \times 2 + 6 = 18 + 6 = 24 \equiv 4$$

یعنی رقم یکسان  $9a + 6$  برابر ۴ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس سوم - پیدا کردن رقم یکسان)

۱۲- گزینه «۳» - بنابر تعریف کلاس هم‌نهشتی می‌نویسیم:

$$[۷]_{۳۳} = \{۳۳k + ۷ \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

اکنون به سادگی متوجه می‌شویم به ازای  $k = ۳$  کوچک‌ترین عدد سه رقمی عضو این کلاس هم‌نهشتی به دست می‌آید:

$$k = ۳ \Rightarrow ۳۳ \times ۳ + ۷ = ۹۹ + ۷ = ۱۰۶$$

در نتیجه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی برابر ۷ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس سوم - کلاس هم‌نهشتی)

۱۳- گزینه «۲» - می‌دانیم برای پیدا کردن باقیمانده یک عدد بر ۱۱ کافی است. در بسط آن عدد به جای توان‌های زوج عدد ۱۰، عدد ۱ و به جای توان‌های فرد عدد ۱۰، عدد (-۱) قرار دهیم:

$$\overbrace{a \ b \ ۳ \ a \ ۷ \ ۵}^{11} \equiv ۵ - ۷ + a - ۳ + b - a \equiv b - ۵$$

چون عدد داده شده بر ۱۱ بخش پذیر است، پس:

$$\overbrace{b - ۵}^{11} \equiv ۰ \Rightarrow \overbrace{b}^{11} \equiv ۵$$

در نتیجه  $b = ۱۱k + ۵$ . از طرف دیگر  $b$  رقم است، پس تنها مقداری که برای  $b$  مورد قبول است  $b = ۵$  است.

(هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس سوم - آزمون‌های بخش پذیری)

۱۴- گزینه «۴» - فرض کنید ۱۴ تیر  $a$  امین و ۲۷ شهریور  $b$  امین روز سال باشند. در این صورت:

$$a = ۳ \times \overbrace{۳}^۷ + \overbrace{۱۴}^۷ \equiv ۳ \times ۳ + ۰ \equiv ۲$$

$$b = ۵ \times \overbrace{۳}^۷ + \overbrace{۲۷}^۷ \equiv ۵ \times ۳ + ۶ \equiv ۷$$

اکنون به این صورت عمل می‌کنیم:

«دومین روز شنبه است، پس هفتمین روز پنج‌شنبه است.»

یعنی ۲۷ شهریور روز پنج‌شنبه است. (هویدی) (ریاضیات گسسته - فصل اول - درس سوم - تقویم‌نگاری)