ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» ــ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}۱۱\,|\,۱۸n+۴ \Rightarrow ۱۱\,|\,۲۲n-۴n+۴\\ \qquad\qquad\quad ۱۱\,|\,۲۲n\end{array}\right\} \Rightarrow ۱۱\,|\,۴n-۴ \Rightarrow ۱۱\,|\,۴(n-۱) \xrightarrow{(۱۱\,,\,۴)=۱} ۱۱\,|\,n-۱$$

یعنی $n-۱=۱۱q$ یا $n=۱۱q+۱$. بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی n به‌ازای $q=۸$ به‌دست می‌آید و $n=۸۸+۱=۸۹$، پس مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دو رقمی n برابر $۱۷=۹+۸$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ بخش‌پذیری) (دشوار)

۲- گزینه «۳» ــ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}۱۳\,|\,۲a-۳b+۱ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times۶} ۱۳\,|\,۱۲a-۱۸b+۶\\ ۱۳\,|\,a+۵b+k\end{array}\right\} \xrightarrow{+} \left.\begin{array}{l}۱۳\,|\,۱۳a-۱۳b+۶+k\\ \text{می دانیم}\ ۱۳\,|\,۱۳a-۱۳b\end{array}\right\} \xrightarrow{-} ۱۳\,|\,k+۶$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی k که به‌ازای آن این رابطه برقرار است $k=۷$ است. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ بخش‌پذیری) (دشوار)

۳- گزینه «۲» ــ ابتدا مقدار α را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\alpha\,|\,۱۳n+۳\\ \alpha\,|\,۷n+۴\end{cases} \Rightarrow \alpha\,|\,۱۳(۷n+۴)-۷(۱۳n+۳) \Rightarrow \alpha\,|\,۳۱ \xrightarrow{\alpha\neq۱} \alpha=۳۱$$

اکنون روی مقدار n بحث می‌کنیم:

$$\begin{cases}۳۱\,|\,۱۳n+۳\\ ۳۱\,|\,۷n+۴\end{cases} \Rightarrow ۳۱\,|\,۲(۷n+۴)-(۱۳n+۳) \Rightarrow ۳۱\,|\,n+۵$$

در نتیجه $n+۵=۳۱q$ یا $n=۳۱q-۵$، پس کوچک‌ترین مقدار n برابر ۲۶ و مجموع ارقام آن $۸=۶+۲$ است.

(سراسری ریاضی ــ ۹۸) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ بخش‌پذیری) (دشوار)

۴- گزینه «۲» ــ از برابری داده شده به‌دست می‌آید:

$$a^۲-b^۲=c \Rightarrow (a-b)(a+b)=c$$

در نتیجه:

$$a-b=۱ \Rightarrow \text{دو عدد اول متوالی اند}\ b\,,\,a \Rightarrow a=۳\,,\,b=۲$$

$$a+b=c \xrightarrow{a=۳\,,\,b=۲} ۳+۲=c \Rightarrow c=۵$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$۲a-۳b+۴c=۶-۶+۲۰=۲۰$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ اعداد اول) (آسان)

۵- گزینه «۳» ــ ابتدا توجه کنید که از $(a\,,\,۳۶۴)=۲۶$ نتیجه می‌گیریم:

$$a=a'\times۲۶\,,\,۳۶۴=۱۴\times۲۶\,,\,(a'\,,\,۱۴)=۱$$

چون $۳۶۴ > ۲۶\times a' = a$، پس $a' < ۱۴$. اکنون باید تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۴ را چنان به‌دست آوریم که نسبت به ۱۴ اول هستند، بنابراین $a'\in\{۱\,,\,۳\,,\,۵\,,\,۹\,,\,۱۱\,,\,۱۳\}$. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ ب.م.م) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ــ اگر $(a\,,\,b)=d$ باشد، آن‌گاه $a=a'd$، $b=b'd$ و $(a'\,,\,b')=۱$. همچنین $[a\,,\,b]=a'b'd$. بنابر فرض:

$$\begin{cases}[a\,,\,b]=۳۱(a\,,\,b)\\ a+b=۲۲۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a'b'd=۳۱d \Rightarrow a'b'=۳۱\\ (a'+b')d=۲۲۴\end{cases}$$

بنابراین:

$$a'b'=۳۱ \xrightarrow{(a'\,,\,b')=۱} a'=۳۱\,,\,b'=۱$$

$$(a'+b')d=۲۲۴ \Rightarrow ۳۲d=۲۲۴ \Rightarrow d=۷$$

در نتیجه:

$$a-b=(a'-b')d=(۳۱-۱)\times۷=۲۱۰$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ ب.م.م و ک.م.م ــ متباین‌سازی) (دشوار)

۷- گزینه «۲» ــ بنابر الگوریتم تقسیم، $a=۷b+۳۸$. اکنون اگر x واحد به b اضافه کنیم، این برابری به‌صورت $a=۷(b+x)+۳۸-۷x$ خواهد بود. چون خارج‌قسمت و مقسوم ثابت می‌ماند، پس $۳۸-۷x$ باقی‌مانده تقسیم جدید است. در نتیجه $۳۸-۷x\geq ۰$ یعنی $۷x\leq ۳۸$ یا $x\leq ۵$. در نتیجه حداکثر ۵ واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد تا شرایط مسئله صدق کند. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ الگوریتم تقسیم) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ می‌دانیم برای هر عدد صحیح a، $a^۲$ به فرم ۴k یا ۴k+۱ است (اگر a زوج باشد، $a^۲$ به فرم ۴k و اگر a فرد باشد، $a^۲$ به فرم ۴k+۱ است.)، در نتیجه $x^۲$ و $y^۲$ به یکی از دو فرم بالا هستند، بنابراین:

$$x^۲ = ۴k\,,\ y^۲ = ۴k' \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۴k + ۴k' = ۴(k + k')$$

$$x^۲ = ۴k\,,\ y^۲ = ۴k' + ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۴k + ۴k' + ۱ = ۴(k + k') + ۱$$

$$x^۲ = ۴k + ۱\,,\ y^۲ = ۴k' + ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۴k + ۱ + ۴k' + ۱ = ۴(k + k') + ۲$$

در نتیجه $x^۲ + y^۲$ در تقسیم بر ۴ نمی‌تواند باقی‌مانده ۳ داشته باشد. در بین گزینه‌ها، باقی‌مانده ۴۹۲، ۴۴۷، ۱۸۱ و ۱۵۰ بر ۴ به‌ترتیب صفر، ۳، ۱ و ۲ هستند، بنابراین هیچ‌گاه $x^۲ + y^۲ = ۴۴۷$ در اعداد صحیح جواب ندارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ الگوریتم تقسیم و کاربرد آن) (متوسط)

۹- گزینه «۴» ـ ابتدا توانی از ۷ را چنان به‌دست می‌آوریم که در پیمانه ۴۳ برابر ۱ یا ۱- باشد:

$$۷^۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۶ \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\times ۷} ۷^۳ \overset{۴۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۴۲ - ۴۳ \overset{۴۳}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان } ۱۸} (۷^۳)^{۱۸} \overset{۴۳}{\equiv} (-۱)^{۱۸} \Rightarrow ۷^{۵۴} \overset{۴۳}{\equiv} ۱$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$۱۳ \times ۷^{۵۴} + A \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۳ \times ۱ + A \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow A \overset{۴۳}{\equiv} -۱۳ \Rightarrow A \overset{۴۳}{\equiv} -۱۳ + ۴۳ \equiv ۳۰$$

(سراسری خارج از کشور ـ ۹۲) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ پیدا کردن باقی‌مانده) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» ـ اگر r باقی‌مانده تقسیم باشد، بنابر فرض:

$$a = ۱۳(r + ۴) + r \quad r = ۰, ۱, \cdots, ۱۲$$

پس:

$$a = ۱۴r + ۵۲$$

چون a − ۲۴ بر ۲۸ بخش‌پذیر است، پس:

$$۱۴r + ۵۲ - ۲۴ \overset{۲۸}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۴r + ۲۸ \overset{۲۸}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۴r \overset{۲۸}{\equiv} ۰ \xrightarrow{(۱۴\,,\,۲۸)=۱۴} r \overset{۲}{\equiv} ۰$$

یعنی r باید زوج باشد. در بین ۱۳ مقداری که r می‌تواند داشته باشد ۷ مقدار زوج است؛ یعنی احتمال مطلوب برابر $\frac{۷}{۱۳}$ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ الگوریتم تقسیم و همنهشت) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» ـ از برابری ۳a + ۷b = ۲ نتیجه می‌گیریم $۳a + ۷b \overset{۷}{\equiv} ۲$، در نتیجه:

$$۳a \overset{۷}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\text{به توان } ۲} ۹a^۲ \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۹a^۲ - ۵ \overset{۷}{\equiv} ۴ - ۵ \overset{۷}{\equiv} -۱ \overset{۷}{\equiv} -۱ + ۷ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم $۹a^۲ - ۵$ بر ۷ برابر ۶ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ ویژگی‌های بخش‌پذیری) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» ـ می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۴ برابر باقی‌مانده دو رقم سمت راست آن عدد بر ۴ است؛ یعنی:

$$\overline{۳۴۷۳a} \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow \overline{۳a} \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳۰ + a \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow a \overset{۴}{\equiv} ۱ - ۳۰ = -۲۹ \Rightarrow a \overset{۴}{\equiv} ۳$$

چون a رقم است، پس ۰ ≤ a ≤ ۹، در نتیجه فقط a = ۳ و a = ۷ مورد قبول است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ قوانین تقسیم‌پذیری) (آسان)

۱۳- گزینه «۱» ـ گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» را ثابت می‌کنیم:

$$۱۵a \overset{۳۰}{\equiv} ۲۰b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow[(۵\,,\,۳۰)=۵]{\div ۵} ۳a \overset{\frac{۳۰}{۵}}{\equiv} ۴b \Rightarrow ۳a \overset{۶}{\equiv} ۴b \ : \text{«۲» گزینه} \\ \xrightarrow{۳|۳۰} ۱۵a \overset{۳}{\equiv} ۲۰b \xrightarrow[۲۰ \overset{۳}{\equiv} -۱]{۱۵ \overset{۳}{\equiv} ۰} ۰ \overset{۳}{\equiv} -b \Rightarrow b \overset{۳}{\equiv} ۰ \ : \text{«۳» گزینه} \\ \xrightarrow{۲|۳۰} ۱۵a \overset{۲}{\equiv} ۲۰b \xrightarrow[۱۵ \overset{۲}{\equiv} ۱]{۲۰ \overset{۲}{\equiv} ۰} a \overset{۲}{\equiv} ۰ \ : \text{«۴» گزینه} \end{cases}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ ویژگی‌های همنهشتی) (متوسط)