

ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۱» -

$$\begin{cases} 9|2a+b+\delta \Rightarrow 9|2a+b+\delta-2(a-2b-k) \Rightarrow 9|9b+2k+\delta \\ 9|a-2b-k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9|9b+2k+\delta \\ 9|9b \end{cases} \Rightarrow 9|2k+\delta$$

باید $2k + \delta$ بر ۹ بخش پذیر باشد بنابراین کمترین مقدار ۲ رقمی برای k برابر با ۱۱ که مجموع ارقام آن ۲ می باشد.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم) (دشوار)

۲- گزینه «۴» -

$$(7n+2, n-3)=d$$

$$\begin{cases} d|7n+2 \\ d|n-3 \end{cases} \Rightarrow d|7n+2-7(n-3) \Rightarrow d|23 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 23$$

$$\xrightarrow{d \neq 1} d=23$$

یعنی هر دو عدد بر ۲۳ بخش پذیرند پس $n-3$ بر ۲۳ بخش پذیر است.

$$n-3=23k \Rightarrow n=23k+3 \xrightarrow{k=4} n=23(4)+3=95$$

بزرگترین مقدار ۲ رقمی به ازای $k=4$ به دست می آید که عدد ۹۵ است و در بین گزینه ها بر ۱۹ بخش پذیر است.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم) (دشوار)

۳- گزینه «۲» -

$$105=bq+q^2, 0 \leq q^2 < |b| \Rightarrow 3 \times 5 \times 7 = q(b+q)$$

حالاتی که ۱۰۵ به صورت ضرب ۲ عدد نوشته می شود را می نویسیم:

$$1 \times 105 = q(b+q) \Rightarrow q=1, b=105 \checkmark$$

$$3 \times 35 = q(b+q) \Rightarrow q=3, b=32 \checkmark$$

$$5 \times 21 = q(b+q) \Rightarrow q=5, b=16$$

$$7 \times 15 = q(b+q) \Rightarrow q=7, b=8$$

فقط ۲ مقدار قابل قبول است چون q^2 به عنوان باقی مانده باید کوچکتر از b باشد.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم) (دشوار)

۴- گزینه «۱» - وقتی دو عدد باقی مانده یکسان در تقسیم بر m دارند به پیمانه m همنهشت هستند. m می تواند تفاضل ۲ عدد یا هر مقسوم علیه از این تفاضل باشد.

$$m \mid 122 \equiv 45 \Rightarrow m \mid 122 - 45 = 77 \text{ یا } 11 \text{ یا } 7$$

$$\xrightarrow{m \text{ کمترین مقدار باشد}} m=7$$

$$m^3 \equiv 12 \pmod{125} \Rightarrow (7^3)^{12} \equiv (1)^{12} \pmod{125} \Rightarrow 7^{36} \equiv 1 \pmod{125}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (متوسط)

۵- گزینه «۲» -

$$13^{63} \equiv ?$$

$$13^2 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان ۳۱}} 13^{62} \equiv -1 \times 13 \xrightarrow{\text{بسیار}} 13^{63} \equiv -13 \equiv 4 \pmod{169}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (آسان)

۶- گزینه «۱» -

$$74 \text{ آمین روز سال است } 74 = 2 \times 31 + 12 = 12 \text{ خرداد}$$

$$74 \equiv 4 \pmod{7} \text{ دوشنبه}$$

$$325 \text{ آمین روز سال است } 325 = 6 \times 31 + 4 \times 30 + 19 = 19 \text{ بهمن}$$

$$325 \equiv 3 \pmod{7} \text{ یکشنبه}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (متوسط)

۷- گزینه «۱» -

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 50!$$

$$\equiv 60 \pmod{7} \Rightarrow 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + \dots$$

$$\equiv 33 \pmod{7} \Rightarrow m=33$$

از $50!$ به بعد همه اعداد بر 60 بخش پذیرند. بنابراین به پیمانه 60 با صفر همنهشت هستند.

برای تعیین رقم یکان عدد 3360 عدد را به پیمانه 10 همنهشت می گیریم (توان بر ۴ بخش پذیر است پس به جای توان عدد ۴ قرار می دهیم).

$$3360 \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (متوسط)

۸- گزینه «۴» -

$$\delta^n - 1 \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow \delta^n \equiv 1 \pmod{16}$$

$$\delta^2 \equiv 9 \pmod{16} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \delta^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow (\delta^4)^k \equiv (1)^k \pmod{16} \Rightarrow \delta^{4k} \equiv 1 \pmod{16}$$

بنابراین $n=4k$ است. تعداد اعداد ۲ رقمی بخش پذیر بر ۴ جواب مسأله است که

$$\text{برابر } \left\lfloor \frac{90}{4} \right\rfloor \text{ است.}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم) (متوسط)