ریاضی ۲

۱- گزینه «۱» ـ اگر α , β ریشه‌های $-۴x^۲+۲x+۱=۰$ باشد، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها به‌صورت زیر است:

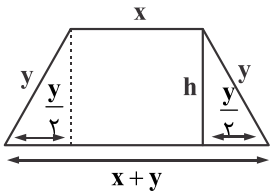
$$S=\alpha+\beta=\frac{۱}{۲}\,,\ P=\alpha\beta=-\frac{۱}{۴}$$

$$(\alpha+\beta)^۳=\alpha^۳+\beta^۳+\underbrace{۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲}_{۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}\ \Rightarrow\ (\frac{۱}{۲})^۳=\alpha^۳+\beta^۳+۳(-\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۲})\ \Rightarrow\ \alpha^۳+\beta^۳=\frac{۱}{۲}$$

$$S'=\alpha^۳+\beta^۳=\frac{۱}{۲}\,,\ P'=\alpha^۳\beta^۳=(-\frac{۱}{۴})^۳=-\frac{۱}{۶۴}\ \Rightarrow\ x^۲-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۶۴}=۰\ \xrightarrow{\times ۴}\ ۴x^۲-۲x-\frac{۱}{۱۶}=۰$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها)

۲- گزینه «۳» ـ



محیط ذوزنقه: $p=۲x+۳y=۶\ \Rightarrow\ x=۳-\frac{۳}{۲}y$

برای محاسبه مساحت متوازی الاضلاع به ارتفاع نیاز داریم. با کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$h=\sqrt{y^۲-(\frac{y}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}y\ \Rightarrow\ S=\frac{(۲x+y)\frac{\sqrt{۳}}{۲}y}{۲}=\frac{(۶-۲y)\frac{\sqrt{۳}}{۲}y}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(-۲y^۲+۶y)\ \Rightarrow\ y_{max}=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ ماکزیمم سهمی)

۳- گزینه «۲» ـ طول BC برابر است با تفاضل ریشه‌های معادله:

$$BC=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|=\sqrt{۲۱}$$

$$y_D=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-۲۱}{۴}\ \Rightarrow\ AD=۲|y_D|=\frac{۲۱}{۲}\ \Rightarrow\ S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۲۱}\times\frac{۲۱}{۲}=\frac{۲۱\sqrt{۲۱}}{۴}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ نمودار تابع درجه دوم)

۴- گزینه «۲» ـ اگر x مجموع نمرات دانش‌آموز در n درس باشد، داریم:

$$\frac{x}{n}=۱۲\ \Rightarrow\ x=۱۲n$$

$$\frac{۱۲n+۱۴+۱۵}{n+۲}=\frac{۳۹}{n}\ \Rightarrow\ \frac{۱۲n+۲۹}{n+۲}=\frac{۳۹}{n}\ \xrightarrow{\times n(n+۲)}\ ۱۲n^۲+۲۹n=۳۹n+۷۸\ \Rightarrow\ ۱۲n^۲-۱۰n-۷۸=۰\ \Rightarrow\ ۶n^۲-۵n-۳۹=۰$$

$$\Delta=۲۵+۴\times۶\times۳۹=۹۶۱\ \Rightarrow\ n=۳\ \text{ق ق}\ ,\ n=-\frac{۱۳}{۶}\ \text{غ ق ق}$$

$$\text{تعداد امتحان‌ها}=n+۲=۵$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات کسری)

۵- گزینه «۳» ـ از تغییر متغیر $u=x^۲+۳x-۱$ استفاده می‌کنیم:

$$u=x^۲+۳x-۱\ \Rightarrow\ ۲u-۳=۲x^۲+۶x-۵\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{u}}{۲u-۳}=۱\ \Rightarrow\ \sqrt{u}=۲u-۳\ \Rightarrow\ u=۴u^۲-۱۲u+۹\ \Rightarrow\ ۴u^۲-۱۳u+۹=۰$$

$$u=\frac{۹}{۴}\,,\ u=۱$$

با توجه به معادله داده شده، $u>\frac{۳}{۲}\ \Rightarrow\ ۲u-۳>۰$ است. تنها جواب $u=\frac{۹}{۴}$ قابل قبول است.

$$\xrightarrow{u=\frac{۹}{۴}}\ x^۲+۳x-۱=\frac{۹}{۴}\ \Rightarrow\ x^۲+۳x-\frac{۱۳}{۴}=۰\ \Rightarrow\ \Delta=۲۲\ \Rightarrow\ x_۱\,,x_۲=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۲}}{۲}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات رادیکالی)

۶- گزینه «۳» ـ k جواب معادله $\sqrt{۴x-۳}=x^۲-x+۱$ است:

$$\sqrt{۴k-۳}=k^۲-k+۱\ \xrightarrow{\text{توان ۲}}\ ۴k-۳=k^۴-۲k^۳+۳k^۲-۲k+۱\ \Rightarrow\ ۴k=k^۴-۲k^۳+۳k^۲-۲k+۴$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{۱۴k^۲+۲}=۴k\ \xrightarrow{\text{توان ۲}}\ ۱۴k^۲+۲=۱۶k^۲\ \Rightarrow\ ۲k^۲-۲=۰\ \xrightarrow{k>\frac{۳}{۴}}\ k=۱$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات رادیکالی)

۷- گزینه «۱» ـ

$$\frac{۱}{M}+\frac{۱}{N}+\frac{۱}{V}=\frac{۱}{۱۰} \text{ و } \frac{۱}{V}+\frac{۱}{N}=\frac{۱}{۱۵}$$

مونا، ویدا و ندا در هر ساعت $\frac{۱}{۱۰}$ کار را انجام می‌دهند. بنابراین پس از ۲ ساعت، $\frac{۲}{۱۰}$ کار انجام می‌شود. ویدا و ندا در یک ساعت، $\frac{۱}{۱۵}$ کار را انجام می‌دهند. بنابراین پس از ۵ ساعت، $\frac{۵}{۱۵}$ کار انجام می‌شود. کل کار انجام شده تا اینجا $\frac{۲}{۱۰}+\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱۶}{۳۰}=\frac{۸}{۱۵}$ است. پس $\frac{۷}{۱۵}$ کار هنوز انجام نشده است. ویدا این مقدار کار را در ۲۱ ساعت انجام داده است. پس در یک ساعت او $\frac{\frac{۷}{۱۵}}{۲۱}=\frac{۱}{۴۵}$ کار را انجام داده است. حال داریم:

$$\frac{۱}{۴۵}+\frac{۱}{N}=\frac{۱}{۱۵} \Rightarrow \frac{۱}{N}=\frac{۲}{۴۵} \Rightarrow N=\frac{۴۵}{۲}=۲۲/۵$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات کسری)

۸- گزینه «۳» ـ در حالت دوم، زمان بیست دقیقه ($\frac{۱}{۳}$ ساعت) اضافه می‌شود. بنابراین $t_۲=t_۱+\frac{۱}{۳}$. با توجه به رابطه $t=\frac{x}{v}$ داریم:

$$\frac{۸۰}{v+۱۰}=\frac{۵۰}{v}+\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۲۴۰v=۱۵۰v+۱۵۰۰+v^۲+۱۰v \Rightarrow v^۲-۸۰v+۱۵۰۰=۰ \Rightarrow (v-۳۰)(v-۵۰)=۰ \Rightarrow v=۳۰ \text{ یا } v=۵۰$$

$$\Rightarrow t_۲=\frac{۸۰}{۳۰+۱۰}=۲ \text{ یا } t_۲=\frac{۸۰}{۵۰+۱۰}=\frac{۸۰}{۶۰}=\frac{۴}{۳}$$ ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه

(جعفری) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات گویا)

۹- گزینه «۴» ـ عدد مورد نظر را x می‌نامیم. داریم:

$$-۳\sqrt{x}-(\frac{x}{۲})^۲=x+۲$$

ابتدا دامنه اعداد مورد قبول را پیدا می‌کنیم:

$$\underbrace{-۳\sqrt{x}}_{\text{همواره} \le ۰}=\underbrace{\frac{x^۲}{۴}+x+۲}_{\text{همواره} > ۰}$$

بنابراین دامنه این معادله $\varnothing$ است. توجه کنید:

$$\frac{x^۲}{۴}+x+۲=۰ \Rightarrow \Delta<۰, a>۰ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+x+۲>۰$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات رادیکالی)

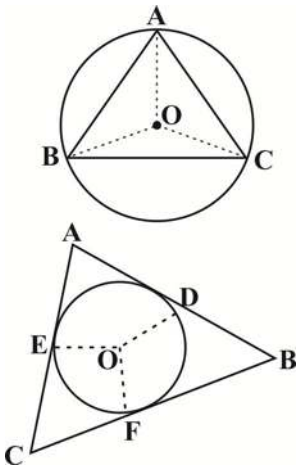
۱۰- گزینه «۲» ـ یک ثانیه بعد از زمان t، جسم ۶ متر به زمین نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین: $t_۲=t_۱+۱, h_۲=h_۱-۶$

$$\sqrt{۴-\frac{h-۶}{۵}}=\sqrt{۴-\frac{h}{۵}}+۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴-\frac{h-۶}{۵}=۴-\frac{h}{۵}+۱+۲\sqrt{۴-\frac{h}{۵}} \Rightarrow \frac{۱}{۵}=۲\sqrt{۴-\frac{h}{۵}} \Rightarrow \frac{۱}{۱۰}=\sqrt{۴-\frac{h}{۵}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۱}{۱۰۰}=۴-\frac{h}{۵} \Rightarrow h=۱۹/۹۵m$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات رادیکالی)

۱۱- گزینه «۱» ـ می‌دانیم هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد. (*)



O روی عمود منصف پاره خط AC است. $\xrightarrow{\text{طبق *}}$ شعاع دایره = OA = OC

O روی عمود منصف پاره خط AB است. $\xrightarrow{\text{طبق *}}$ شعاع دایره = OA = OB

O روی عمود منصف پاره خط BC است. $\xrightarrow{\text{طبق *}}$ شعاع دایره = OB = OC

مورد «الف» درست است. $\Rightarrow$ O محل برخورد عمود منصف‌های مثلث است.

می‌دانیم اگر نقطه‌ای از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن قرار دارد.

O روی نیمساز زاویه A است. $\xrightarrow{\text{طبق **}}$ شعاع دایره = OD = OE

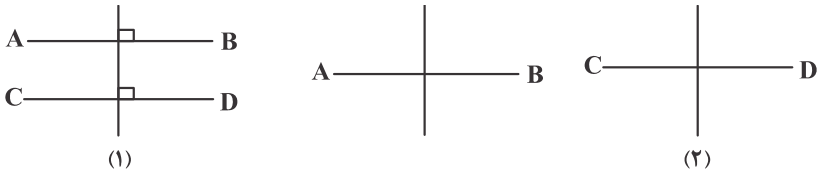
O روی نیمساز زاویه B است. $\xrightarrow{\text{طبق **}}$ شعاع دایره = OD = OF

O روی نیمساز زاویه C است. $\xrightarrow{\text{طبق **}}$ شعاع دایره = OE = OF

مورد «ب» نادرست است. $\Rightarrow$ O محل برخورد نیمسازهای مثلث است.

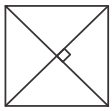
مورد «پ» نیز طبق * درست است. (جعفری) (فصل دوم ـ درس اول ـ ترسیم هندسی)

۱۲- گزینه «۴» ـ دو حالت زیر را داریم. عمودمنصف‌های AB , CD را رسم می‌کنیم.



همان‌طور که می‌بینیم در شکل (۱)، عمود منصف‌ها بر هم منطبق‌اند. پس از نقطه O بی‌شمار وجود دارد. اما در شکل (۲) عمود منصف‌ها نقطه اشتراکی ندارند. بنابراین نقطه‌ای مانند O وجود ندارد. (جعفری) (فصل دوم ـ درس اول ـ ترسیم هندسی)

۱۳- گزینه «۴» ـ به‌عنوان مثال نقض برای مورد «ث» می‌توان از شکل زیر استفاده کرد.



همان‌طور که می‌بینیم در این شکل قطرها بر هم عمودند، اما لوزی نیست. (جعفری) (فصل دوم ـ درس دوم ـ استدلال)

۱۴- گزینه «۳» ـ

$$DE \parallel BF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EF}$$

$$DF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{BD}=\frac{AF}{FC}$$

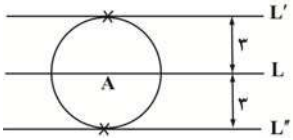
$$\Rightarrow \frac{AE}{EF}=\frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{۲-x}{x}=\frac{۲}{۲x+۱} \Rightarrow -۲x^۲+x+۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۴} \Rightarrow$$

$$FC=\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$$

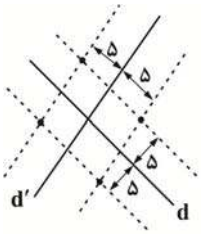
(جعفری) (فصل دوم ـ درس دوم ـ قضیه تالس)

۱۵- گزینه «۳» ـ بررسی موارد:

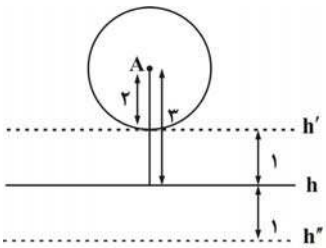
«آ»: نقاطی که از خط L به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند، روی دو خط موازی با L و به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن قرار دارد و نقاطی که از A به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند، روی یک دایره به مرکز A و شعاع ۳ قرار دارد. اشتراک این دو ناحیه همان‌طور که در شکل می‌بینیم دو نقطه است.



«ب»: نقاطی که از d و d' به فاصله ۵ سانتی‌متر باشند، روی دو خط موازی با آن‌ها و به فاصله ۵ سانتی‌متر قرار دارد. اشتراک این خطوط، ۴ نقطه است.

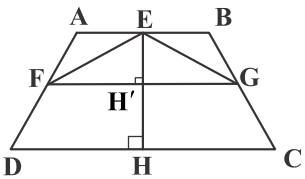


«پ»: مطابق شکل فقط یک نقطه با شرایط گفته شده وجود دارد.



(جعفری) (فصل دوم ـ درس اول ـ ترسیم‌های هندسی)

۱۶- گزینه «۲» ـ نکته: در ذوزنقه $ABCD$، اگر F و G وسط اضلاع AD و BC باشد، داریم:



$$FG=\frac{AB+CD}{۲}\ ,\ EH'=\frac{۱}{۲}EH$$

بنابراین:

$$S_{EFG}=\frac{۱}{۲}FG\times EH'=\frac{۱}{۲}\left(\frac{AB+CD}{۲}\right)\times\frac{۱}{۲}EH=\frac{۱}{۸}(AB+CD)EH \Rightarrow \frac{S_{EFG}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۴}$$

(جعفری) (فصل دوم ـ درس دوم ـ قضیه تالس)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$C\hat{E}G = C\hat{F}A$, مورب $BC \Rightarrow ED \parallel AF$

$\xrightarrow{\overset{\Delta}{ACF}\text{ قضیه تالس در}} \frac{CE}{CF} = \frac{EG}{AF} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{CE}{CF-CE} = \frac{EG}{AF-EG} \Rightarrow \frac{CE}{EF} = \frac{EG}{AF-EG}$

$\xrightarrow{\times ۲} \frac{۲CE}{EF} = \frac{۲EG}{AF-EG}$ (۱)

$\xrightarrow{\overset{\Delta}{BDE}\text{ قضیه تالس در}} \frac{BF}{BE} = \frac{AF}{DE} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{BF}{BE-BF} = \frac{AF}{DE-AF} \xrightarrow[AF=DG]{BF=۲CE} \frac{۲CE}{EF} = \frac{AF}{DE-DG}$ (۲)

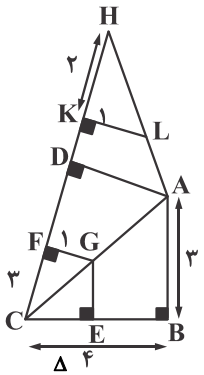
$\xrightarrow{(۲),(۱)} \frac{۲EG}{AF-EG} = \frac{AF}{EG} \Rightarrow ۲EG^{۲} + (AF)(EG) - AF^{۲} = ۰ \Rightarrow \Delta = AF^{۲} + ۸AF^{۲} = ۹AF^{۲}$

$GE = \frac{-AF \pm ۳AF}{۴} \Rightarrow GE = -AF$ غ ق ق , $GE = \frac{۱}{۲}AF$ ق ق

$DE = GE + DG = \frac{۱}{۲}AF + AF = \frac{۳}{۲}AF$

(جعفری) (فصل دوم ـ درس دوم ـ قضیه تالس)

۱۸- گزینه «۴» ـ



$\xrightarrow{\overset{\Delta}{CGF}\text{ قضیه فیثاغورس در}} CG = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰}$

$\xrightarrow{\overset{\Delta}{ACD}\text{ قضیه تالس در}} \frac{CG}{AC} = \frac{GF}{AD} = \frac{CF}{CD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۱۰}}{۵} = \frac{۱}{AD} = \frac{۳}{CD} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}, CD = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲}$

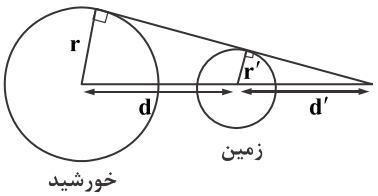
$\xrightarrow{\overset{\Delta}{ADH}\text{ قضیه تالس در}} \frac{KH}{DH} = \frac{KL}{AD} \Rightarrow \frac{۲}{DH} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}} \Rightarrow DH = \sqrt{۱۰} \Rightarrow CH = CD + DH = \frac{۳\sqrt{۱۰} + ۲\sqrt{۱۰}}{۲} = \frac{۵\sqrt{۱۰}}{۲}$

(جعفری) (فصل دوم ـ درس دوم ـ قضیه تالس)

۱۹- گزینه «۲» ـ برای این‌که نقطه مورد نظر از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد، باید روی عمود منصف AB باشد. حال می‌خواهیم این نقطه روی d باشد. اگر عمود منصف AB، d را قطع کند، یک جواب دارد. اگر آن را قطع نکند، جواب ندارد. اگر بر آن منطبق باشد، بی‌شمار جواب دارد.

(جعفری) (فصل دوم ـ درس اول ـ ترسیم‌های هندسی)

۲۰- گزینه «۱» ـ طول سایه زمین را d' در نظر می‌گیریم:



$\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{d'}{d+d'} = \frac{r'}{r} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{d'}{d} = \frac{r'}{r-r'} \Rightarrow d' = \frac{r'd}{r-r'}$

(جعفری) (فصل دوم ـ درس دوم ـ قضیه تالس)