

حسابان ۱

۱- گزینه «۳» -

یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ است. $\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0}$ $(a-1)x^2 + (4-a)x^2 - 4x + 1 = 0$

$$[(a-1)x^2 + (4-a)x^2 - 4x + 1] \div (x-1) = \underbrace{(a-1)x^2 + 3x - 1}_{P = \frac{-1}{a-1}} = 0$$

$$\text{ریشه ۳ حاصل ضرب } 1 \times P = \frac{-1}{a-1} = \frac{-1}{2} \Rightarrow a-1=2 \Rightarrow a=3$$

(گروه مؤلفان علوی) (صفرهای تابع) (دشوار)

۲- گزینه «۲» - معادله داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^2 - x)^2 + x^2 - x - 2 = 0, \quad x^2 - x = t$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^2 - x)^2}_t + \underbrace{(x^2 - x)}_t - 2 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه حقیقی دارد.} \\ x^2 - x = -2 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

(گروه مؤلفان علوی) (صفرهای تابع) (متوسط)

۳- گزینه «۱» -

$$x_S = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow -\frac{2}{2a} = 1 \Rightarrow a = -1$$

از طرفی با توجه به نمودار، عرض از مبدأ سهمی برابر ۳ است، بنابراین $c = 3$ می‌باشد. لذا:

$$y = -x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{x_S=1} y_S = 4 \Rightarrow S(1, 4)$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \xrightarrow{x_A < 0} x_A = -1 \Rightarrow A(-1, 0) \\ x = 3 \end{cases}$$

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+3}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$SM = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

(گروه مؤلفان علوی) (ترکیبی) (دشوار)

۴- گزینه «۳» - فرض می‌کنیم کارگر اول، نصف کار را در x ساعت انجام دهد. بنابراین در یک ساعت $\frac{1}{x}$ از نصف کار را انجام می‌دهد. لذا کارگر دوم

نصف دیگر کار را در $12/5 - x$ ساعت و در نتیجه در یک ساعت $\frac{1}{12/5 - x}$ از نصف دیگر کار را انجام می‌دهد. پس با هم در یک

ساعت $\frac{1}{x} + \frac{1}{12/5 - x}$ از نصف کار را انجام می‌دهند.

	ساعت	نصف کار
با هم:	۱	$\frac{1}{x} + \frac{1}{12/5 - x}$
	۳	۱

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{12/5 - x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3(12/5 - x + x) = x(12/5 - x) \Rightarrow x^2 - 12/5x + 37/5 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{12/5 \pm \sqrt{156/25 - 150}}{2} = \frac{12/5 \pm 2/5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 7/5 \\ x = 5 \end{cases}$$

بنابراین کارگر اول به تنهایی کل کار را یا در $15 = 2 \times 7/5$ ساعت و یا در $10 = 5 \times 2$ ساعت انجام می‌دهد.

(کتاب همراه علوی) (معادلات شامل عبارتهای گویا) (متوسط)

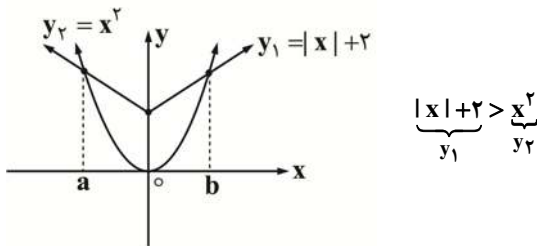
۵- گزینه «۳» -

$$\sqrt{3x^2+6} = A \Rightarrow A^2 + A - 12 = 0 \Rightarrow (A+4)(A-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2+6} = 3 \Rightarrow 3x^2+6=9 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

(کتاب همراه علوی) (معادلات شامل عبارت‌های گنگ) (متوسط)

۶- گزینه «۲» - از روش هندسی استفاده می‌کنیم.



با توجه به نمودار، در بازه (a, b) داریم $y_1 > y_2$. حال محل برخورد دو نمودار، یعنی a و b را می‌یابیم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow |x| + 2 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{x \geq 0} x = 2 \Rightarrow b = 2 \\ x < 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{x < 0} x = -2 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

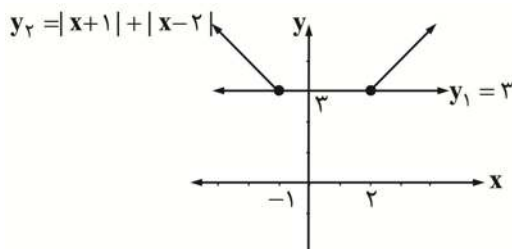
پس مجموعه جواب این نامعادله $(-2, 2)$ است. (گروه مؤلفان علوی) (ترکیبی) (متوسط)

۷- گزینه «۱» -

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

(گروه مؤلفان علوی) (ویژگی‌های قدرمطلق) (آسان)

۸- گزینه «۴» - نمودار مربوط به $y_1 = 3$ و $y_2 = |x+1| + |x-2|$ را در یک صفحه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که دیده می‌شود، دو نمودار در بی‌شمار نقطه در بازه $[-1, 2]$ یکدیگر را قطع می‌کنند. لذا این معادله بی‌شمار جواب دارد.

(کتاب همراه علوی) (معادلات قدرمطلق) (آسان)

۹- گزینه «۱» -

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-3)^2 + (1-2)^2} &= \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 - 6a + 10} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 - 6a + 10 = 2 \\ \Rightarrow a^2 - 6a + 8 &= 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow 2 + 4 = 6 \end{aligned}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فاصله بین دو نقطه) (آسان)

۱۰- گزینه «۴» -

$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(3+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \\ AC &= \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \\ BC &= \sqrt{(1+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مختلف الاضلاع}$$

$$AB^2 \neq AC^2 + BC^2 \Rightarrow \text{قائم‌الزاویه نیست}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فاصله بین دو نقطه) (آسان)

۱۱- گزینه «۳» -

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} &= \sqrt{(x-5)^2 + (y-7)^2} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 \\ \Rightarrow -6x - 2y + 10 &= -10x - 14y + 74 \Rightarrow 4x + 12y - 64 = 0 \\ \Rightarrow \text{نقطه } (1, 5) &\text{ روی خط قرار دارد} \Rightarrow x + 3y = 16 \Rightarrow \text{معادله عمود منصف} \end{aligned}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فاصله بین دو نقطه) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» -

$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ AC &= \sqrt{(5-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{(5-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{محيط مثلث } MNQ = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فاصله بین دو نقطه) (آسان)

۱۳- گزینه «۴» - فرض می‌کنیم $D(x, y)$ رأس چهارم باشد. داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_A + x_C &= x_B + x_D \Rightarrow 3 + 5 = 4 + x \Rightarrow x = 4 \\ y_A + y_C &= y_B + y_D \Rightarrow 2 + 2 = 1 + y \Rightarrow y = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(4, 3)$$

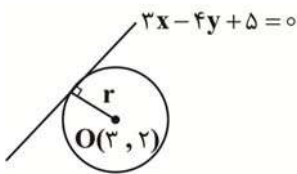
(گروه مؤلفان علوی) (مختصات نقطه وسط یک پاره خط) (آسان)

۱۴- گزینه «۲» -

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{3+2+1}{3}, \frac{1+2+6}{3}\right) \Rightarrow G(2, 3)$$

(گروه مؤلفان علوی) (مختصات نقطه وسط یک پاره خط) (آسان)

۱۵- گزینه «۲» -



$$r = \frac{|9 - 8 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$\frac{S_{\text{دایره}}}{P_{\text{دایره}}} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{1.2}{2} = 0.6$$

(گروه مؤلفان علوی) (فاصله نقطه از خط) (آسان)

۱۶- گزینه «۴» -

$$m_{AC} = \frac{2-3}{3-0} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y - y_A = m_{AC}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 6 = -x + 3$$

$$\Rightarrow AC \text{ ضلع } AC: x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow \text{ارتفاع وارد بر ضلع } AC = \frac{|4 + 3 - 9|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۱۷- گزینه «۱» - قاعده را پاره خط AC و ارتفاع وارد بر آن را BH در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\text{اندازه قاعده} = AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\text{اندازه ارتفاع} = BH = \frac{\text{فاصله نقطه } B \text{ از خط } AC}{1} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

دقت داشته باشید که:

$$AC \text{ خط } AC: y - 1 = \frac{2-1}{-2-1}(x-1) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow 3y - 3 = -x + 1$$

$$\Rightarrow x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}, \quad B(4, 1)$$

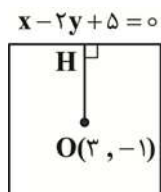
$$BH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 + 3 - 4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

بنابراین:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\sqrt{10} \times \frac{3}{\sqrt{10}}}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

(کتاب همراه علوی) (فاصله نقطه از خط) (دشوار)

۱۸- گزینه «۴» -



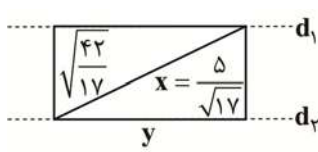
$$OH = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\text{طول ضلع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

(سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۳) (فاصله نقطه از خط) (آسان)

$$\left. \begin{array}{l} d_1 : 4x + y - 1 = 0 \\ d_2 : 4x + y - 6 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} d_2, d_1 \text{ فاصله: } x = \frac{|-6+1|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{17}}$$



$$\Rightarrow y^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{17}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{4^2}{17}}\right)^2 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow \text{مساحت } S = xy = \frac{5}{\sqrt{17}} \times 1 = \frac{5}{\sqrt{17}}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فاصله دو خط موازی) (متوسط)

$$\left. \begin{array}{l} \text{AB عمود منصف: } y = -x + 3 \\ \text{AC عمود منصف: } y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{محل برخورد}} O\left(\frac{11}{6}, \frac{7}{6}\right)$$

(گروه مؤلفان علوی) (مختصات نقطه وسط یک پاره خط) (متوسط)