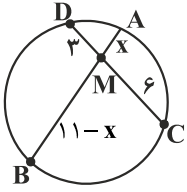


۱- گزینه «۴» -



$$\frac{MD}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MD = k, MC = 2k$$

$$DC = MD + MC = k + 2k = 9 \Rightarrow 3k = 9 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow MD = 3, MC = 2 \times 3 = 6$$

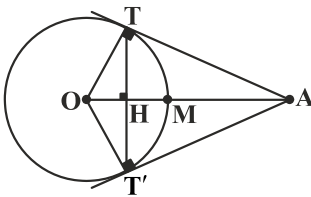
فرض می‌کنیم $MA = x$ باشد، پس $MB = 11 - x$ است و به کمک روابط طولی در دایره داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow x \times (11 - x) = 6 \times 3 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 9$$

وتر CD وتر AB را به نسبت $\frac{9}{2}$ قطع می‌کند. (علوی) (روابط طولی در دایره) (متوسط)

۲- گزینه «۳» -



$$\text{فاصله } A \text{ تا نزدیک‌ترین نقطه دایره} = 2 \Rightarrow AM = 2$$

$$OA = OM + AM = 3 + 2 = 5$$

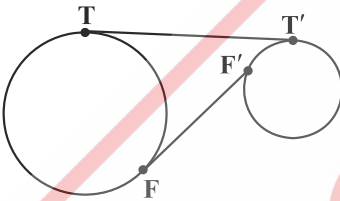
$$\Delta AOT: OT^2 + AT^2 = OA^2 \Rightarrow 3^2 + AT^2 = 5^2$$

$$AT = 4$$

$$\Delta AOT \text{ قائم‌الزاویه در مثلث قائم‌الزاویه } AOT: AT^2 = AH \times OA \Rightarrow 4^2 = AH \times 5 \Rightarrow AH = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

(علوی) (روابط طولی در دایره) (متوسط)

۳- گزینه «۳» -

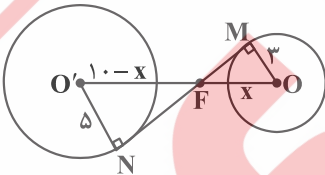


$$\left. \begin{aligned} TT' &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 6 = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 36 = d^2 - (R - R')^2 \\ FF' &= \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \Rightarrow 4 = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \Rightarrow 16 = d^2 - (R + R')^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین دو تساوی را از هم کم می‌کنیم.}} 36 - 16 = (R + R')^2 - (R - R')^2 \Rightarrow 20 = 4RR' \Rightarrow RR' = 5$$

(علوی) (طول مماس مشترک‌ها) (متوسط)

۴- گزینه «۲» -



$$\Delta MOF \sim \Delta FO'N \text{ (زج)}$$

$$\xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \frac{OM}{O'N} = \frac{OF}{O'F} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{10-x}$$

$$30 - 3x = 5x \Rightarrow 30 = 8x \Rightarrow x = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

$$O'F = 10 - x = 10 - 3\frac{3}{4} = 6\frac{1}{4}$$

(علوی) (وضعیت دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها) (متوسط)

۵- گزینه «۱» - از M به مرکز دایره (O) وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط D و C قطع کند. داریم:

$$\text{رابطه طولی در دایره: } MA \times MB = MD \times MC$$

$$\Rightarrow 4 \times 7 = MD \times (MD + 4) \Rightarrow 28 = MD^2 + 4MD$$

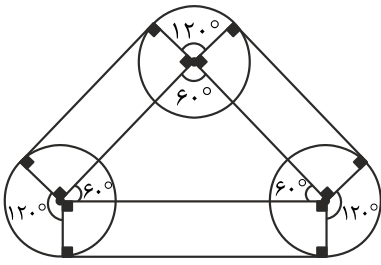
$$\Rightarrow MD^2 + 4MD - 28 = 0 \Rightarrow MD = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-28)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64 \times 2}}{2}$$

$$\Rightarrow MD = \frac{-4 \pm 8\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 4\sqrt{2} \Rightarrow MD = 4\sqrt{2} - 2$$

$$\text{فاصله } M \text{ تا دورترین نقطه دایره} = MC = MD + DC = 4\sqrt{2} - 2 + 4 = 4\sqrt{2} + 2$$

(علوی) (روابط طولی در دایره) (دشوار)

۶- گزینه «۱» -

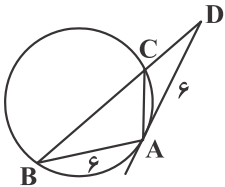


$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$S = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \frac{3\pi}{4} = 4\sqrt{3} + \frac{3\pi}{4}$$

(علوی) (مساحت قطاع) (متوسط)

۷- گزینه «۱» -



$$AB = AD \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}, \hat{B} \text{ محاطی} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \text{ظالمی } \hat{A} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow AC = CD$$

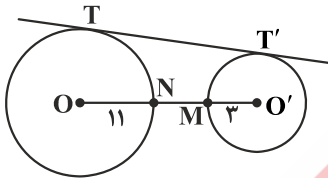
$$\Delta \text{ محیط } ABC = 16 = AB + AC + BC = 6 + AC + BC \Rightarrow AC + BC = 10$$

$$CD = AC \Rightarrow BD = BC + CD = BC + AC = 10 \Rightarrow BD = 10$$

$$AD^2 = CD \times BD \Rightarrow 36 = CD \times 10 \Rightarrow CD = 3/6 \Rightarrow BC = BD - CD = 10 - 3/6 = 6/4$$

(کتاب همراه علوی) (روابط طولی در دایره) (دشوار)

۸- گزینه «۳» - با توجه به شکل، MN کمترین فاصله بین نقاط این دو دایره است و $MN = d - (R + R')$



$$TT' = 2\sqrt{33} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

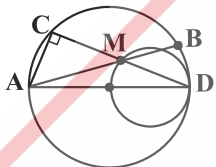
$$\Rightarrow 2\sqrt{33} = \sqrt{OO'^2 - 64} \Rightarrow OO' = 19$$

$$MN = 19 - (11 + 3) = 5$$

(کتاب همراه علوی) (طول مماس مشترک) (متوسط)

۹- گزینه «۴» -

$$L_{\widehat{AC}} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{360} \times 2\pi \times 4 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 60^\circ \Rightarrow \text{محاطی } \widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



$$\text{محاطی روبه روی قطر } \widehat{DCA} = \frac{\widehat{AD}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CAD} = 60^\circ$$

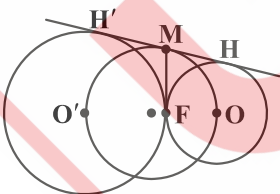
$$\Delta \text{ ACD: } 60^\circ \text{ رو به } CD = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$$

$$OM \perp CD \Rightarrow CM = MD = \frac{CD}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{رابطه طولی در دایره: } MA \cdot MB = CM \cdot MD = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12$$

(سراسری - ۹۹) (رابطه‌های طولی در دایره) (دشوار)

۱۰- گزینه «۱» -



$$HH' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{4 \times 9} = 12$$

$$\left. \begin{array}{l} MH = MF \\ MH' = MF \end{array} \right\} \Rightarrow MF = MH' = MH = \frac{HH'}{2}$$

$$\Rightarrow MF = \frac{12}{2} = 6$$

(سراسری خارج از کشور - ۹۸) (وضعیت دو دایره نسبت به هم و طول مماس مشترک) (دشوار)