ریاضیات

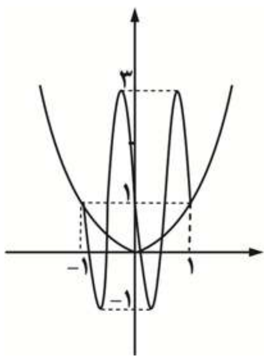
۱- گزینه «۲» ـ نمودار تابع در یک دوره تناوب رسم شده است و نقطه $x = \pi$ مشخص شده در نمودار برابر است با $\frac{T}{۴}$. بنابراین:

$$\frac{T}{۴} = \pi \Rightarrow T = ۴\pi$$

بنابراین گزینه‌های «۳» و «۴» حذف می‌شوند، زیرا دوره تناوبشان π است. همچنین با توجه به این‌که ماکزیمم تابع برابر است با ۵، پس گزینه «۱» هم حذف می‌شود زیرا ماکزیمم مقدار تابع گزینه «۱»، ۷ است. پس تنها گزینه ممکن گزینه «۲» است.

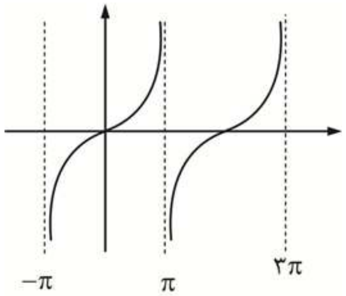
(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۲- گزینه «۳» ـ دوره تناوب تابع f برابر است با $T = \frac{۲\pi}{۲\pi} = ۱$. همچنین ماکزیمم و مینیمم تابع f برابر است با ۳ و ۱-. حال دو تـابع f و g را رسـم می‌کنیم:



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۳- گزینه «۳»ـ با توجه به اینکه تابع $y = \tan(\frac{x}{۲})$ درنقطه $x = \pi$ از بازه $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ تعریف نشده است، پس در این بازه نه صعودی و نه نزولی است.



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب و تانژانت)

۴- گزینه «۴» ـ نکته: به‌ازای هر α، همواره داریم: $|\sin\alpha| \le |\tan\alpha|$. بنابراین نمودار تابع g در بازه $(\circ, \frac{\pi}{۲})$ زیـر نمـودار f و در بـازه $(-\frac{\pi}{۲}, \circ)$ بالای f است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تابع تانژانت)

۵- گزینه «۱» ـ

$$۳x \ne k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x \ne \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x \ne \frac{(۲k+۱)\pi}{۶}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ دامنه تابع تانژانت)

۶- گزینه «۴» ـ فرض می‌کنیم دوره تناوب تابع $y = f(x)$، T باشد، دراین‌صورت دوره تناوب تابع $y = f(\pi x + ۲)$ برابر است با $\frac{T}{\pi}$.

از طرف دیگر طبق نمودار داده شده دوره تناوب تابع $y = f(\pi x + ۲)$، $\frac{۲}{۳}$ است. بنابراین:

$$\frac{T}{\pi} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۳}$$

حال دوره تناوب تابع $y = f(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۳})$ برابر می‌شود با:

$$۲T = \frac{۴\pi}{۳}$$

توجه کنید می‌توان نمودار $y = f(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۳})$ را با کمک قوانین انتقال از روی نمودار $y = f(\pi x + ۲)$ رسم کرد و از این طریق دوره تناوب تابع را به‌دست آورد. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۷- گزینه «۱» ـ نکته:

$$\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$$

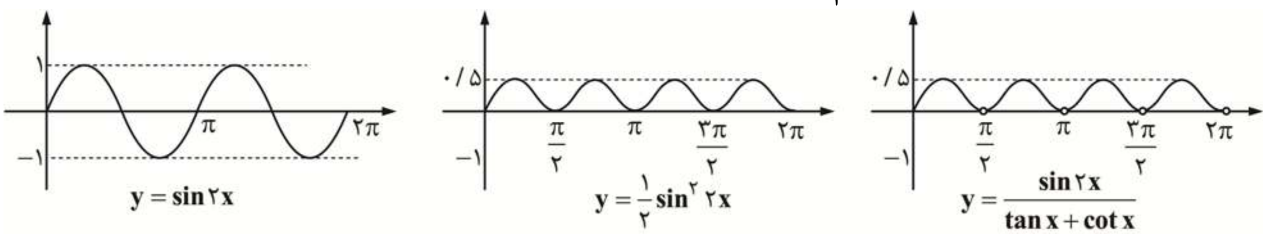
اثبات:

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2}{\sin 2x}$$

حال داریم:

$$y=\frac{\sin 2x}{\tan x+\cot x}=\frac{\sin 2x}{\frac{2}{\sin 2x}}=\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

همان‌طور که می‌بینیم در شکل دوره تناوب تابع $\frac{\pi}{2}$ است.



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ دروس اول و دوم ـ تناوب، نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان)

۸- گزینه «۲» ـ

$$\frac{1+\cos^4 x-\sin^4 x}{1+\cos x+\cos 2x}=\frac{1+(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)}{1+\cos x+2\cos^2 x-1}=\frac{1+2\cos^2 x-1}{\cos x(1+2\cos x)}=\frac{2\cos x}{1+2\cos x}=4$$

$$\Rightarrow\ 2\cos x=4+8\cos x\ \Rightarrow\ \cos x=-\frac{2}{3}$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\ \Rightarrow\ \tan^2 x=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}\ \Rightarrow\ \tan x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان)

۹- گزینه «۴» ـ

$$\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+1=\frac{2}{\sin x}+\frac{1}{8}\sin x+1=0\ \Rightarrow\ \frac{2+\frac{1}{8}\sin^2 x+\sin x}{\sin x}=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{8}\sin^2 x+\sin x+2=0\ \Rightarrow$$

$\sin x=-4$ غ ق ق $\Rightarrow$ معادله ریشه ندارد

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$\cos^2 x-\sin^2 x=-1\ \Rightarrow\ 2\cos^2 x-1=-1\ \Rightarrow\ 2\cos^2 x=0\ \Rightarrow\ \cos x=0\ \xrightarrow{x\in[0,\frac{11\pi}{6}]}\ x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ مجموع جواب ها $=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=2\pi$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۱- گزینه «۳» ـ

$$\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cos x)}{\sin x-\cos x}=\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cos x=1+\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Rightarrow\ 1+\frac{1}{2}\sin 2x=\cos 4x\ \xrightarrow{\cos 4x=1-2\sin^2 2x}\ 1+\frac{1}{2}\sin 2x=1-2\sin^2 2x\ \Rightarrow\ \sin 2x(\frac{1}{2}+2\sin 2x)=0$$

$$\begin{cases}\sin 2x=0\ \Rightarrow\ 2x=k\pi\ \Rightarrow\ x=\frac{k\pi}{2}\ \xrightarrow{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}\ x=0\,,\ x=\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}+2\sin 2x=0\ \Rightarrow\ \sin 2x=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

با توجه به این‌که $x\in[0\,,\frac{\pi}{2}]$ است، پس $\sin 2x=\frac{-1}{4}$ غیرقابل قبول است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۲- گزینه «۱» ـ می‌دانیم $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sin x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{-1}{1} = -1$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ محاسبه حد توابع کسری)

۱۳- گزینه «۱» ـ با توجه به این‌که مخرج کسر وقتی $x \to 2$، صفر می‌شود و حاصل حد یک عدد شده است، نتیجه می‌شود که صورت کسر هم به‌ازای $x = 2$ باید صفر شود:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{x} - a = 0 \Rightarrow a = \sqrt[3]{2}$$

حال به محاسبه حد می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2x}} = \lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2x})} = \frac{1}{4(3\sqrt[3]{4})} = \frac{1}{12\sqrt[3]{4}} \Rightarrow b = \frac{1}{12\sqrt[3]{4}} \Rightarrow a^2 b = \frac{1}{12}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ محاسبه حد در توابع کسری)

۱۴- گزینه «۳» ـ مقدار تابع در دو طرف ریشه مخرج به سمت $-\infty$ رفته است. این نشان می‌دهد که مخرج ریشه مضاعف دارد. یعنی دلتای مخرج برابر صفر است.

$$\Delta = m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = \pm 4$$

$$\xrightarrow{m=4} y = \frac{1+4x}{-x^2+4x-4} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{1+4x}{-x^2+4x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{1+4x}{-(x-2)^2} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

$$\xrightarrow{m=-4} y = \frac{1-4x}{-x^2-4x-4} \Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{1+4x}{-x^2-4x-4} = \lim_{x\to -2} \frac{1+4x}{-(x+2)^2} = \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

بنابراین مقدار $m = 4$ قابل قبول است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد بی‌نهایت)

۱۵- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to 1^+} (f(x) - 2) = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} (-f(-x) + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(4-x) = f(4 - (1^+)) = f(3^-) = 0^+$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(f(x)-2)(-f(-x)+1)}{f(4-x)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد بی‌نهایت)

۱۶- گزینه «۳» ـ

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow \sqrt{2x-1} < 1 + \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x - 1 < 1 + x - 1 + 2\sqrt{x-1} \Rightarrow x - 1 < 2\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow 1 < x < 5$$

مورد «الف» درست نیست. زیرا $1 < x < 5$ یک همسایگی برای ۲ است اما همسایگی محذوف نیست. موارد «ب»، «پ» و «ت» در مورد بازه $1 < x < 5$ درست هستند. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ همسایگی)

۱۷- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to 0^-} f(|x-1|) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f([-x]) = f[-0^-] = f[0^+] = f(0) = -3 \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} (f(|x-1|) + f([x]) + [f(x)]) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} [f(x+1)] = [f(0^- + 1)] = [f(1^-)] = [2^-] = 1$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل ششم ـ درس اول ـ فرایندهای حدی)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}[\sin\pi(x+۱)]+a=[\sin\pi^+]+a=[۰^-]+a=-۱+a$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\tan^۲ x-\sin^۲ x}{\sqrt[۳]{\tan x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\tan^۲ x\sin^۲ x}{\sqrt[۳]{\tan x}}=\lim_{x\to ۰^-}\tan^{\frac{۵}{۳}} x\sin^۲ x=۰$$

$$\Rightarrow -۱+a=۰\Rightarrow a=۱$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۹- گزینه «۲» ـ نکته: اگر $x\to ۰$، هم ارزی زیر را داریم:

$$(۱+ax)^n\sim ۱+nax$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+۴x}\sqrt[۳]{۱-۶x}-(۱+۲x)^۲}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+\frac{۱}{۲}\times ۴x)(۱-\frac{۱}{۳}\times ۶x)-(۱+۲\times ۲x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+۲x)(۱-۲x)-(۱+۴x)}{x}$$

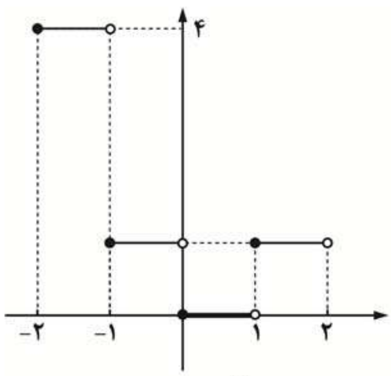
$$=\lim\frac{۱-۴x^۲-۱-۴x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۴x(x+۱)}{x}=-۴$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

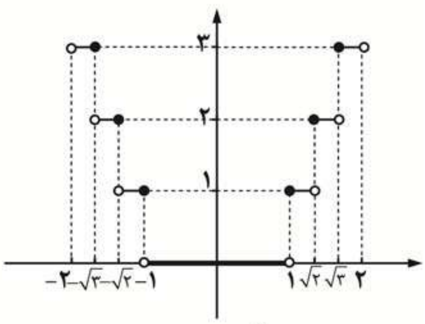
۲۰- گزینه «۱» ـ توابع جزء صحیح در نقاطی که عبارت درون آن عدد صحیح می‌شود، حد ندارند و در نتیجه پیوسته نیستند، مگر این‌که در آن نقطه دارای می‌نیمم یا ماکزیمم باشند، بنابراین در بازه $(-۲\,,\,۲)$ تابع $f(x)=[x^۲]$ در نقاط $x=\pm۱\,,\pm\sqrt{۲}\,,\pm\sqrt{۳}$ پیوسته نیست. توجه کنید که f در $x=۰$ دارای می‌نیمم است، پس در این نقطه پیوسته است.

$$(\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}[x^۲]=[۰^+]=۰\,,\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}[x^۲]=[۰^+]=۰)$$

و تابع $g(x)=[x]^۲$ در نقاط ±۱ و $x=۰$ پیوسته نیست.



$g(x)=[x]^۲$



$f(x)=[x^۲]$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل ششم ـ درس سوم ـ پیوستگی)

۲۱- گزینه «۳» ـ ابتدا دامنه توابع gof و $f^۲+g^۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=[-۱\,,\,۱]$$

$$D_{f^۲+g^۲}=D_{f^۲}\cap D_{g^۲}=D_f\cap D_g=[-۱\,,\,۱]$$

دامنه هر دو تابع $[-۱\,,\,۱]$ است.بنابراین حد دو تابع در $x=۱$ وجود ندارد. زیرا حد آن‌ها در ۱^+ تعریف نشده است.

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل ششم ـ درس اول ـ فرایندهای حدی)

۲۲- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(ax-۱)=a-۱\quad,\quad f(۱)=a-۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲}{[x]-۱}=\frac{۲}{[۱^-]-۱}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

$$\Rightarrow a-۱=-۲\Rightarrow a=-۱$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل ششم ـ درس سوم ـ پیوستگی)

۲۳- گزینه «۳» ـ می‌خواهیم $۶-\sqrt{۳۵}$ را به‌صورت مربع کامل بنویسیم:

$$۶-\sqrt{۳۵}=A^۲+B^۲+۲AB\qquad \sqrt{۳۵}=\sqrt{۷\times ۵}=۲AB\Rightarrow A=\sqrt{\frac{۷}{۲}}\quad B=\sqrt{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow(\sqrt{\frac{۷}{۲}}-\sqrt{\frac{۵}{۲}})^۲=۶-\sqrt{۳۵}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۶-\sqrt{۳۵}}-\sqrt{\frac{۷}{۲}}=\sqrt{\frac{۷}{۲}}-\sqrt{\frac{۵}{۲}}-\sqrt{\frac{۷}{۲}}=-\sqrt{\frac{۵}{۲}}$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ ریشه و توان)

۲۴- گزینه «۱» ـ

$$\frac{۲۷^{\frac{۵}{۶}}}{۱-\sqrt{۳}}=\frac{(۳^{۳})^{\frac{۵}{۶}}}{۱-\sqrt{۳}}=\frac{۳^{\frac{۵}{۲}}}{۱-\sqrt{۳}}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{۹\sqrt{۳}+۲۷}{۱-۳}=-\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۲۷}{۲}=-۴/۵\sqrt{۳}-۱۳/۵$$

$$\Rightarrow\ A=-۴/۵\sqrt{۳}-۱۳/۵+۱۳/۵=-۴/۵\sqrt{۳}$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ توان‌های گویا)

۲۵- گزینه «۴» ـ

$$x^{۳}+۴x-۱=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases} x^{۳}+۴x=۱\xrightarrow{\div x}x^{۲}+۴=\frac{۱}{x}\ \Rightarrow\ x^{۲}-\frac{۱}{x}=-۴ \\ x^{۳}=۱-۴x\xrightarrow{\text{توان}۲}x^{۶}=۱+۱۶x^{۲}-۸x\ \Rightarrow\ -x^{۶}+۱۶x^{۲}-۸x=-۱ \end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{(x^{۲}-\frac{۱}{x})^{۷}}{-x^{۶}+۱۶x^{۲}-۸x}=\frac{(-۴)^{۷}}{-۱}=۴^{۷}$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس چهارم ـ عبارت‌های جبری)