

ریاضیات

۱- گزینه «۳» -

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cos 2x = \cos x \sin x \cos 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - دوره تناوب)

۲- گزینه «۱» - کمترین مقدار این تابع برابر ۳- است پس:

$$-3 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = -3 \Rightarrow \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 2\pi x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{+3\pi} x = \frac{2k}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8k+3}{12}$$

به ازای $k=0$ ، مقدار x برابر $\frac{1}{4}$ به دست می آید. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - معادلات مثلثاتی)

۳- گزینه «۴» - بیشترین مقدار تابع $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ می باشد پس $a=1$ است، نقاط برخورد تابع با محور x ها را به دست می آوریم.

$$y=0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

در نتیجه $a+b$ برابر $1 + \frac{3\pi}{2}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - نمودارشناسی)

۴- گزینه «۱» -

$$\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2\sin^2 \alpha) = 2\sin^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{16}{25}\right) - 1 = \frac{32-25}{25} = \frac{7}{25}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - نسبت های 2α)

۵- گزینه «۳» -

$$\cos^2 x - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{12}$	$\pi + \frac{\pi}{12}$	$2\pi - \frac{\pi}{12}$
		$\pi - \frac{\pi}{12}$	

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - معادله مثلثاتی)

۶- گزینه «۱» -

$$y = \sin x (-\cos 2x + 2\cos^2 x) = \sin x (1 - 2\cos^2 x + 2\cos^2 x) = \sin x \Rightarrow T = 2\pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مثلثات - دوره تناوب)

۷- گزینه «۴» - طبق امتحان تقسیم

$$p(x) = (x^2 - 4)q(x) + x \Rightarrow p(2) = p(-2) = 0 \quad (1)$$

رابطه (۱) نشان می‌دهد که $p(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است.

$$p(x) = (x + 2)Q(x) \xrightarrow{\times x} xp(x) = (x^2 + 2x)Q(x) \quad (2)$$

رابطه (۲) نشان می‌دهد که $xp(x)$ بر $x^2 + 2x$ بخش پذیر است، بنابراین باقیمانده $xp(x)$ بر $x^2 + 2x$ برابر صفر است.

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد و پیوستگی - تقسیم)

۸- گزینه «۴» -

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{+(x-1)(x+1)}{x+1} = -2$$

اختلاف حدها برابر ۴ است. (نصیری) (پایه یازدهم - حد - $\frac{0}{0}$)

۹- گزینه «۲» -

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = (2 - (2^+)) + \delta = (2 - 2) + \delta = \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2 - (2^-)) + \delta = (2 - 2) + \delta = \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \delta - \delta = 0$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حد بر اکتی)

۱۰- گزینه «۴» -

مقدار تابع $f(1) = 7$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (b[x] + 3ax) = b + 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3a|x-1|}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3a(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = -a$$

چون تابع $f(x)$ در $x = 1$ پیوسته است پس:

$$-a = b + 3a = 7 \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 28 \end{cases} \Rightarrow a + b = 21$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد و پیوستگی - پیوستگی در نقطه)

۱۱- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x} \sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x \sqrt{1 - \cos x}}{|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - مثلثاتی)

۱۲- گزینه «۲» -

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{\Delta + \sqrt{x+1}} - 2)(\sqrt[3]{(\Delta + \sqrt{x+1})^2} + 2\sqrt[3]{\Delta + \sqrt{x+1}} + 4)(\sqrt{2x+4})}{(\sqrt{2x-4})(\sqrt{2x+4})(\sqrt[3]{(\Delta + \sqrt{x+1})^2} + 2\sqrt[3]{\Delta + \sqrt{x+1}} + 4)} \\ = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\Delta + \sqrt{x+1} - 8)(\sqrt{2x+4})}{(2x-16)(\sqrt[3]{(\Delta + \sqrt{x+1})^2} + 2\sqrt[3]{\Delta + \sqrt{x+1}} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{8(\sqrt{x+1} - 3)}{24(x-8)} \\ = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{x+1} - 3)(\sqrt{x+1} + 3)}{(x-8)(\sqrt{x+1} + 3)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 3} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد $\frac{0}{0}$)

۱۳- گزینه «۲» -

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 + x}{(x-1)^2(x+2)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد بی‌نهایت)

۱۴- گزینه «۱» - تابع $f(x)$ فقط در نقطه $x = 2$ حد ندارد، اما حد چپ و راست $f(x)$ در $x = 2$ قرینه یکدیگرند. پس $|f(x)|$ در همه نقاط حد دارد.

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حد از نمودار)

۱۵- گزینه «۳» -

$$4x + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{بازه} = \left(2, \frac{9}{4}\right)$$

بازه $\left(2, \frac{9}{4}\right)$ همسایگی چپ $\frac{9}{4}$ است. (نصیری) (پایه یازدهم - حد - همسایگی)

۱۶- گزینه «۱» -

$$f(1) = g(1) \Rightarrow 1 + a - 1 = 1 - 1 - a \Rightarrow a = 0$$

$$(fg)(2) = f(2)g(2) = (8-1)(16-4) = 7 \times 12 = 84$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - تقسیم)

۱۷- گزینه «۲» -

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x))^{-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد بی‌نهایت)

۱۸- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{[x]} = \frac{0^-}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد بی‌نهایت)

۱۹- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a^x - 2a}{1-x} = +\infty \Rightarrow \frac{a^x - 2a}{0^-} = +\infty \Rightarrow a^x - 2a < 0 \Rightarrow 0 < a < 2 \xrightarrow{+1} 1 < a+1 < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a+1}{x} = \frac{a+1}{0^+} = +\infty \quad (1 < a+1 < 3)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد بی‌نهایت)

۲۰- گزینه «۴» -

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\sqrt{17+x}}{|x-4|} = \frac{-\sqrt{17+4}}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi - x}{x^x - x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi - x}{x^x(1-x)} = \frac{\pi - 0}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[1-\sqrt{x}] + 2}{x(x-1)^x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - حد - حد بی‌نهایت)

۲۱- گزینه «۳» -

$$2a^x - b^x = 91 \Rightarrow (2a-b)(2a+b) = 91 \xrightarrow{b+2a=7} 2a-b = 13$$

$$\begin{cases} 2a-b = 13 \\ b+2a = 7 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = 20 \Rightarrow a = 5, b = -3 \Rightarrow b-2a = -13$$

(نصیری) (پایه دهم - اتحاد - اتحاد مزدوج)

۲۲- گزینه «۲» -

$$\sqrt{\sqrt{6} - (\sqrt{2}-1)} \times \sqrt{\sqrt{6} + (\sqrt{2}-1)} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{6 - (2+1-2\sqrt{2})} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

(نصیری) (پایه دهم - ریشه - محاسبات رادیکالی)

۲۳- گزینه «۳» -

$$A = \frac{7}{8} + 3\sqrt{\frac{16+9}{9 \times 4}} = \frac{7}{8} + 3\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{7}{8} + 3 \times \frac{5}{6} = \frac{7}{8} + \frac{5}{2} = \frac{27}{8}$$

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

(نصیری) (پایه دهم - ریشه و توان - ریشه سوم)

۲۴- گزینه «۲» -

$$a = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}$$

$$a = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} + \frac{2-\sqrt{5}}{4-5}$$

$$a = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + 2-\sqrt{3} - 2 + \sqrt{5} = \sqrt{5}-1$$

$$(1+\sqrt{5})a = (1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1) = 5-1 = 4$$

(نصیری) (پایه دهم - رادیکال‌ها - گویا کردن)

۲۵- گزینه «۴» -

$$x^x - 5x^x - 6x = x(x^x - 5x^x - 6) = x(x-6)(x+1)$$

(نصیری) (پایه دهم - اتحاد و تجزیه - تجزیه)