ریاضی تجربی

۱- گزینه «۴» ـ

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=-2 \Rightarrow 1-\sqrt{x}=-8 \Rightarrow \sqrt{x}=9 \Rightarrow x=81 \Rightarrow x+19=100$$

ریشه‌های دوم عدد $x+19$ برابر ۱۰ و ۱۰- است. (نصیری) (پایه دهم ـ ریشه و توان) (آسان)

۲- گزینه «۳» ـ عبارت $a^{\frac{1}{n}}$ برای $n \in \mathbb{N}$ و $a > 0$ تعریف می‌شود.

$$\frac{1-x}{1+x}>0 \Rightarrow -1<x<1$$

(نصیری) (پایه دهم ـ ریشه و توان) (متوسط)

۳- گزینه «۴» ـ به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$(\sqrt{2+x}+\sqrt{12+x})(\sqrt{2+x}-\sqrt{12+x})=(2+x)-(12-x) \Rightarrow 5(\sqrt{2+x}-\sqrt{12+x})=-10 \Rightarrow \sqrt{12+x}-\sqrt{2+x}=2$$

$$\begin{cases}\sqrt{2+x}+\sqrt{12+x}=5\\ \sqrt{12+x}-\sqrt{2+x}=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{2+x}=\frac{3}{2}\\ \sqrt{12+x}=\frac{7}{2}\end{cases} \Rightarrow A=2\times\frac{3}{2}(1+\frac{7}{2})=13/5$$

(نصیری) (پایه دهم ـ اتحادها) (متوسط)

۴- گزینه «۱» ـ از اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt{3}$$

$$A=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1-\sqrt{3}-2-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt{3}=-1$$

(نصیری) (پایه دهم ـ رادیکال‌ها ـ گویا کردن) (متوسط)

۵- گزینه «۳» ـ تابع $f(x)$ در $x=1$ حد ندارد (حد چپ و راست دارد، اما با هم برابر نیستند)، پس باید یک ضریب صفرکننده داشته باشد تا حد داشته باشد.

$$\lim_{x\to 1} g(x)f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1+x}f(x)=0$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ حد ـ قضایای حد) (آسان)

۶- گزینه «۴» ـ با فرض $\lim_{x\to 2^+} f(x)=L$ داریم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]+f(x)}{[x]-f(x)}=3 \Rightarrow \frac{2+L}{2-L}=3 \Rightarrow 6-3L=2+L \Rightarrow 4L=4 \Rightarrow L=1 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 2^+}[-x]f(x)=[-(2^+)]\times 1=-3$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ حد ـ قضایای حد) (آسان)

۷- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to 1}(4f^2(x)+4f(x)+1)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1}(2f(x)+1)^2=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 1}[f(x)]=[-\frac{1}{2}]=-1$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ حد ـ قضایای حد ـ حد براکت) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ

$$A=\lim_{x\to 1/2}(\sin\pi[x]+[\sin x])=\sin\pi(1)+[\sin 1/2]$$

توجه داشته باشید که ۱/۲ رادیان در ناحیه اول مثلثاتی قرار دارد و $1 > \sin 1/2 > 0$ خواهد بود، پس جواب حد برابر است با:

$$A=\sin\pi+[0]=0+0=0$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ حد) (دشوار)

۹- گزینه «۱» ـ

$$g(-۲)=a+۱,\quad \lim_{x\to(-۲)^+} g(x)=b\times۲=۲b$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} g(x)=[(-۲)^-]+(-۱)=-۳-۱=-۴$$

چون $g(x)$ در ۲- پیوسته است، پس:

$$\begin{cases}a+۱=-۴ \Rightarrow a=-۵\\ ۲b=-۴ \Rightarrow b=-۲\end{cases} \Rightarrow \sqrt[-b]{۴-a}=\sqrt{۹}=۳$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ پیوستگی) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» ـ تابع $[x]$ در بازه $(۰, ۳)$ در دو نقطه $x=۱$ و $x=۲$ ناپیوسته است، پس باید تابع $g(x)$ نیز در این دو نقطه ناپیوسته باشد، در نتیجه $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌های مخرج تابع $g(x)$ هستند.

$$۲x^۲+ax+b=۲(x-۱)(x-۲)=۲(x^۲-۳x+۲)=۲x^۲-۶x+۴ \Rightarrow \begin{cases}a=-۶\\ b=۴\end{cases} \Rightarrow a+b=-۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ پیوستگی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» ـ الف) تابع تانژانت در هر بازه‌ای که تعریف می‌شود، صعودی اکید است.

ب) دوره تناوب تابع $\sin\frac{۳x}{۲}$ برابر است با:

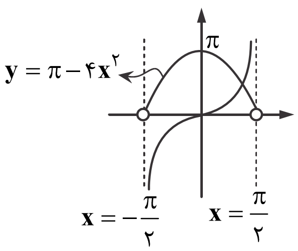
$$T=\frac{۲\pi}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴\pi}{۳}$$

پ) بیش‌ترین مقدار تابع $۳\sin^۲ x-۱$ برابر است با:

$$\max y=۳\times۱-۱=۲$$

پس همه جمله‌ها صحیح است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تناوب و تانژانت) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ـ معادله را به‌صورت $\tan x=\pi-۴x^۲$ تبدیل می‌کنیم و دو تابع $\begin{cases}f(x)=\tan x\\ g(x)=\pi-۴x^۲\end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که دو تابع f و g یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع تانژانت) (دشوار)

۱۳- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=m\cos m(x-\frac{۹\pi}{۲m})=m\cos(mx-\frac{۹\pi}{۲})=m\sin mx$$

چون ضریب x و ضریب کمان هر دو m و هم‌علامت هستند، پس کافی است که $m\neq۰$ باشد تا نمودار صحیح باشد.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تناوب) (دشوار)

۱۴- گزینه «۳» ـ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{۱-\sqrt{۲}\sin x\cos x}=\frac{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{۱-\sqrt{۲}\sin x\cos x}$$

$$f(x)=\frac{(۱-\sqrt{۲}\sin x\cos x)(۱+\sqrt{۲}\sin x\cos x)}{۱-\sqrt{۲}\sin x\cos x}=۱+\sqrt{۲}\sin x\cos x=۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تناوب) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» ـ

$$\sin(\frac{۷\pi}{۲}+\alpha)=\frac{۱}{۳} \Rightarrow -\cos\alpha=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{۱}{۳}$$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱ = ۲(-\frac{۱}{۳})^{۲}-۱=\frac{۲}{۹}-۱=-\frac{۷}{۹}$$

$$\cos ۴\alpha = ۲\cos^{۲} ۲\alpha - ۱ = ۲(-\frac{۷}{۹})^{۲}-۱=\frac{۲\times ۴۹}{۸۱}-۱=\frac{۱۷}{۸۱}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نسبت‌های ۲α) (متوسط)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$\frac{\tan^{۲} x}{\sin x(۱+\tan^{۲} x)}=۱ \Rightarrow \frac{\frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}}{(\sin x)\times \frac{۱}{\cos^{۲} x}}=۱ \Rightarrow \sin x=۱$$

دقت کنید که وقتی $\sin x = ۱$ است، در این صورت $\tan x$ تعریف نمی‌شود، پس معادله فاقد جواب است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (دشوار)

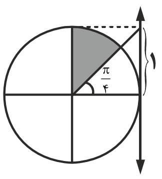
۱۷- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=۳-\frac{۱}{۴}\cos(x-۱) \Rightarrow \max f(x)=۳+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۳}{۴}$$

$$g(x)=f(x)+۱=۴-\frac{۱}{۴}\cos(x-۱) \Rightarrow \min g(x)=۴-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۵}{۴}$$

$$\min g(x)-\max f(x)=\frac{۱۵}{۴}-\frac{۱۳}{۴}=۰/۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ برد مثلثاتی) (آسان)



۱۸- گزینه «۱» ـ اگر α در فاصله $(\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ تغییر کند، در این صورت $\tan\alpha > ۱$ خواهد بود. پس:

$$\frac{m}{۲}>۱ \Rightarrow m>۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تابع تانژانت) (آسان)

۱۹- گزینه «۳» ـ

$$۲\sin^{۲} x-۱=\sin ۴x \Rightarrow ۱-۲\sin^{۲} x=\sin(-۴x) \Rightarrow \cos ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x) \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۴x \\ ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۴x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=-k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ ۶x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» ـ

$$p(-۲)=۴$$

$$g(x)=xp^{۲}(x)-p(x)+x^{۴}$$

$$g(-۲)=-۲p^{۲}(-۲)-p(-۲)+(-۲)^{۴}=-۲(۴)^{۲}-۴+۱۶=-۲۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ تقسیم) (آسان)

۲۱- گزینه «۳» ـ

$$k=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{۲x^{۲}-x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(۲x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{۲x+۱}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳k=۱$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{۳k}{|x+۲|}=\frac{۱}{۰^{+}}=+\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد بی‌نهایت) (متوسط)

۲۲- گزینه «۱» ـ

$$A = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x[-x]+۲}{\sqrt[۳]{x}-x} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{-۲x+۲}{\sqrt[۳]{x}-x}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+x\sqrt[۳]{x}+x^۲}{\sqrt[۳]{x^۲}+x\sqrt[۳]{x}+x^۲} = \lim_{x\to ۱}\frac{-۲(x-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+x\sqrt[۳]{x}+x^۲)}{-x(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to ۱}\frac{۲(\sqrt[۳]{x^۲}+x\sqrt[۳]{x}+x^۲)}{x(x+۱)}$$

$$= \frac{۲(۱+۱+۱)}{۱(۱+۱)} = ۳$$

$$B = \lim_{x\to ۱^-} \frac{-x^۲+|x|}{[-x]+x} = \lim_{x\to ۱}\frac{-x^۲+x}{-۱+x} = \lim_{x\to ۱}\frac{-x(x-۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}(-x) = -۱ \Rightarrow A+B = ۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد $\frac{۰}{۰}$) (متوسط)

۲۳- گزینه «۱» ـ توجه کنید که عبارت $۱+\cos\alpha$ همواره نامنفی است و همچنین $\sin ۴$ عددی منفی است.

$$\lim_{x\to ۴^+} \frac{\sin x}{۱+\cos\frac{۴\pi}{x}} = \frac{\sin ۴}{۰^+} = -\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد بی‌نهایت) (دشوار)

۲۴- گزینه «۴» ـ

$$p(۲) = ۰ \Rightarrow ۸+۲+m = ۰ \Rightarrow m = -۱۰$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{p(x-۱)+۸}{p(x)} = \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۱)^۳+(x-۱)-۱۰+۸}{x^۳+x-۱۰} = \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲-x+۲)}{(x-۲)(x^۲+۲x+۵)} = \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-x+۲}{x^۲+۲x+۵} = \frac{۴}{۱۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد $\frac{۰}{۰}$) (دشوار)

۲۵- گزینه «۱» ـ دقت کنید که $\pi - ۳ > ۰$ است.

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{\pi-۳}{۹-x^۲} = \frac{\pi-۳}{۹-۹^+} = \frac{\pi-۳}{۰^-} = -\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد بی‌نهایت) (آسان)