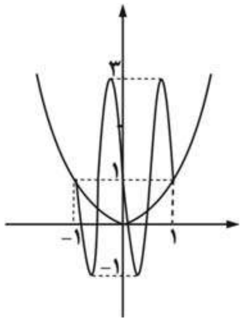
۱- گزینه «۲» ـ نمودار تابع در یک دوره تناوب رسم شده است و نقطه $x = \pi$ مشخص شده در نمودار برابر است با $\frac{T}{۴}$. بنابراین:

$$\frac{T}{۴} = \pi \Rightarrow T = ۴\pi$$

بنابراین گزینه‌های «۳» و «۴» حذف می‌شوند، زیرا دوره تناوبشان π است. همچنین با توجه به این‌که ماکزیمم تابع برابر است با ۵، پس گزینه «۱» هم حذف می‌شود زیرا ماکزیمم مقدار تابع گزینه «۱»، ۷ است. پس تنها گزینه ممکن گزینه «۲» است.

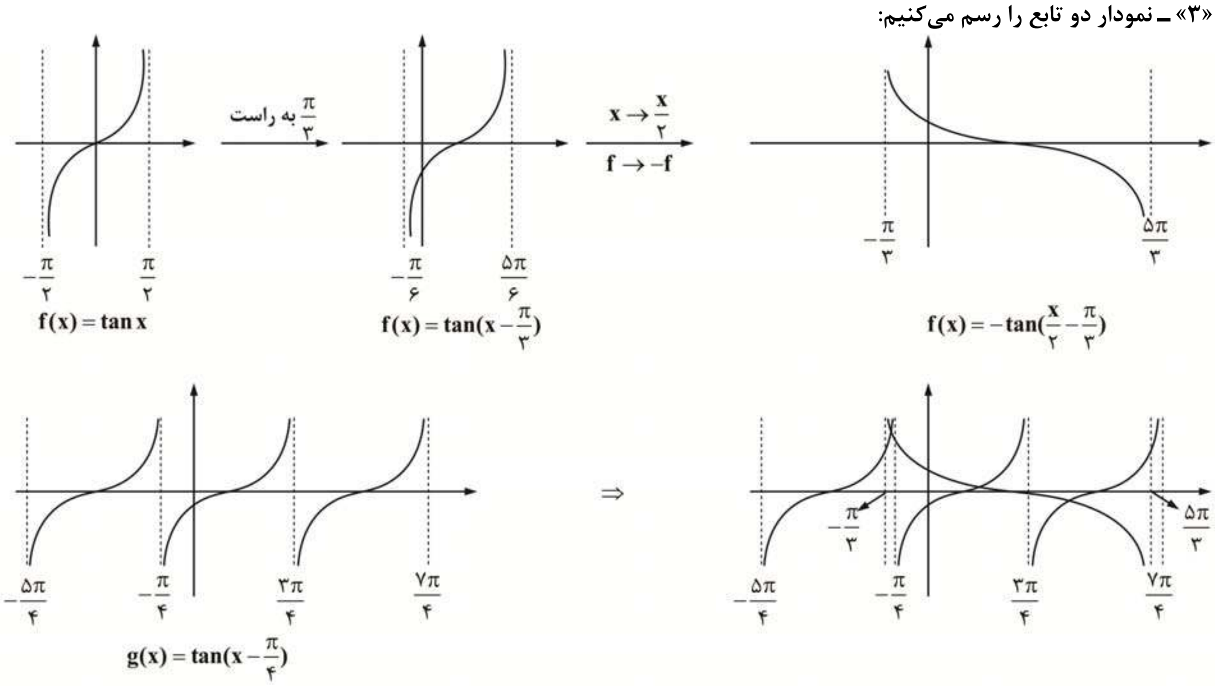
(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۲- گزینه «۳» ـ دوره تناوب تابع f برابر است با $T = \frac{۲\pi}{۲\pi} = ۱$. همچنین ماکزیمم و مینیمم تابع f برابر است با ۳ و ۱− . حال دو تابع f و g را رسم می‌کنیم:



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۳- گزینه «۳» ـ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب و تانژانت)

۴- گزینه «۴» ـ نکته: به‌ازای هر α، همواره داریم: $|\sin\alpha| \le |\tan\alpha|$. بنابراین نمودار تابع g در بازه $(۰, \frac{\pi}{۲})$ زیر نمودار f و در بازه $(-\frac{\pi}{۲}, ۰)$ بالای f است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تابع تانژانت)

۵- گزینه «۱» ـ ابتدا به‌دلیل وجود $\sqrt{x}$ باید داشته باشیم: $x \ge ۰$. حال دامنه تابع y برابر است با:

$$\{x \ge ۰ \mid \frac{\pi}{۵ + \sqrt{x}} \ne k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\}$$

باید xهایی که به‌ازای آن‌ها $k \in \mathbb{Z}$ و $\frac{\pi}{۵ + \sqrt{x}} = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ است را پیدا کرده و از دامنه $x \ge ۰$ خارج کنیم:

$$\frac{\pi}{۵ + \sqrt{x}} = k\pi + \frac{\pi}{۲} \overset{\div\pi}{\Rightarrow} \frac{۱}{۵ + \sqrt{x}} = \frac{۲k + ۱}{۲} \Rightarrow ۵ + \sqrt{x} = \frac{۲}{۲k + ۱} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{۲}{۲k + ۱} - ۵ \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-۱۰k - ۳}{۲k + ۱}$$

باتوجه به این‌که $\sqrt{x}$ نامنفی است، باید $\frac{-۱۰k - ۳}{۲k + ۱}$ نیز نامنفی باشد:

$$\frac{-۱۰k - ۳}{۲k + ۱} \ge ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < k \le -\frac{۳}{۱۰} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \varnothing \Rightarrow x \in \varnothing$$

بنابراین هیچ xای وجود ندارد که بخواهیم آن را از بازه $x \ge ۰$ خارج کنیم، پس دامنه تابع y، همان $x \ge ۰$ است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ دامنه تابع تانژانت)

۶- گزینه «۴» ـ فرض می‌کنیم دوره تناوب تابع $y=f(x)$، T باشد، دراین‌صورت دوره تناوب تابع $y=f(\pi x+2)$ برابر است با $\frac{T}{\pi}$.

از طرف دیگر طبق نمودار داده شده دوره تناوب تابع $y=f(\pi x+2)$، $\frac{2}{3}$ است. بنابراین:

$$\frac{T}{\pi}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ T=\frac{2\pi}{3}$$

حال دوره تناوب تابع $y=f(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$ برابر می‌شود با:

$$2T=\frac{4\pi}{3}$$

توجه کنید می‌توان نمودار $y=f(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$ را با کمک قوانین انتقال از روی نمودار $y=f(\pi x+2)$ رسم کرد و از این طریق دوره تناوب تابع را به‌دست آورد. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۷- گزینه «۱» ـ نکته:

$$\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$$

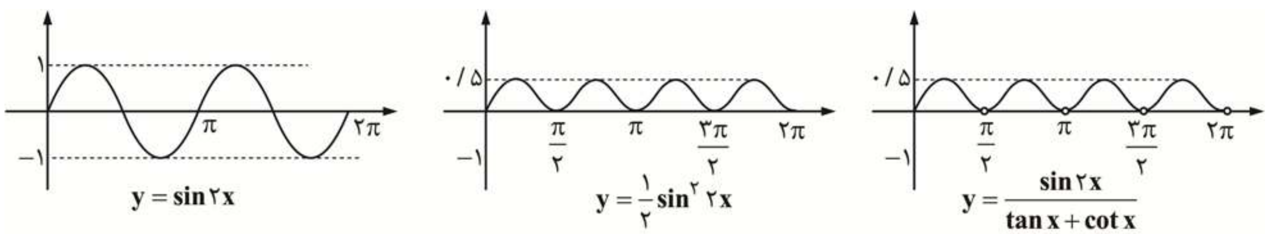
اثبات:

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2}{\sin 2x}$$

حال داریم:

$$y=\frac{\sin 2x}{\tan x+\cot x}=\frac{\sin 2x}{\frac{2}{\sin 2x}}=\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

همان‌طور که می‌بینیم در شکل دوره تناوب تابع $\frac{\pi}{2}$ است.



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ دروس اول و دوم ـ تناوب، نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان)

۸- گزینه «۲» ـ

$$\frac{1+\cos^4 x-\sin^4 x}{1+\cos x+\cos 2x}=\frac{1+(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)}{1+\cos x+2\cos^2 x-1}=\frac{1+2\cos^2 x-1}{\cos x(1+2\cos x)}=\frac{2\cos x}{1+2\cos x}=4$$

$$\Rightarrow\ 2\cos x=4+8\cos x\ \Rightarrow\ \cos x=-\frac{2}{3}$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\ \Rightarrow\ \tan^2 x=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}\ \Rightarrow\ \tan x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان)

۹- گزینه «۴» ـ

$$\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+1=\frac{2}{\sin x}+\frac{1}{8}\sin x+1=0\ \Rightarrow\ \frac{2+\frac{1}{8}\sin^2 x+\sin x}{\sin x}=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{8}\sin^2 x+\sin x+2=0\ \Rightarrow$$

$\sin x=-4$ غ ق ق $\Rightarrow$ معادله ریشه ندارد

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$\sin^2 a+\overbrace{\sin 2a}^{2\sin a\cos a}=1\xrightarrow{\div\cos^2 a}\tan^2 a+2\tan a=\frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\Rightarrow\ \tan^2 a+2\tan a=1+\tan^2 a\ \Rightarrow\ \tan a=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 3x=0\ \Rightarrow\ \sin 2x=-\sin 3x\ \Rightarrow\ \sin 2x=\sin(-3x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi-3x\ \Rightarrow\ x=\dfrac{2k\pi}{5}\xrightarrow{x\in[0,\frac{3\pi}{2}]}\begin{cases}k=0\ \Rightarrow\ x=0\\ k=1\ \Rightarrow\ x=\dfrac{2\pi}{5}\\ k=2\ \Rightarrow\ x=\dfrac{4\pi}{5}\\ k=3\ \Rightarrow\ x=\dfrac{6\pi}{5}\end{cases}\\ 2x=(2k+1)\pi+3x\ \Rightarrow\ x=-(2k+1)\pi\xrightarrow{x\in[0,\frac{3\pi}{2}]}\ \Rightarrow\ k=-1\ \Rightarrow\ x=\pi\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای ۵ جواب در بازه $[0,\frac{3\pi}{2}]$ است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۱- گزینه «۳» ـ

$$\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cos x)}{\sin x-\cos x}=\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cos x=1+\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Rightarrow\ 1+\frac{1}{2}\sin 2x=\cos 4x\xrightarrow{\cos 4x=1-2\sin^2 2x}1+\frac{1}{2}\sin 2x=1-2\sin^2 2x\ \Rightarrow\ \sin 2x(\frac{1}{2}+2\sin 2x)=0$$

$$\begin{cases}\sin 2x=0\ \Rightarrow\ 2x=k\pi\ \Rightarrow\ x=\dfrac{k\pi}{2}\xrightarrow{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}x=0\,,x=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{2}+2\sin 2x=0\ \Rightarrow\ \sin 2x=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

با توجه به این‌که $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ است، پس $\sin 2x=\frac{-1}{4}$ غیرقابل قبول است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۲- گزینه «۲» ـ

$$\tan(4x-\frac{3\pi}{4})=\tan(x-\frac{3\pi}{4}+3x)=\frac{\tan(x-\frac{3\pi}{4})+\tan 3x}{1-\tan(x-\frac{3\pi}{4})\tan 3x}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$\tan(4x-\frac{3\pi}{4})-\tan(4x-\frac{3\pi}{4})\tan(x-\frac{3\pi}{4})\tan 3x=\tan(x-\frac{3\pi}{4})+\tan 3x$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\tan(x-\frac{3\pi}{4})}_{\tan(x+\frac{\pi}{4})}-\tan(4x-\frac{3\pi}{4})+\tan 3x=-\tan(4x-\frac{3\pi}{4})\underbrace{\tan(x-\frac{3\pi}{4})}_{\tan(x+\frac{\pi}{4})}\tan 3x$$

توجه کنید که:

$$\tan(x+\frac{\pi}{4})=\tan(x+\pi-\frac{3\pi}{4})=\tan(x-\frac{3\pi}{4})$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ تانژانت مجموع دو زاویه)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$\sin 3x\cos x(\tan x+\tan 2x)+\sin x\cos 3x(\tan x+\tan 2x)=0\ \Rightarrow\ (\tan x+\tan 2x)(\underbrace{\sin 3x\cos x+\sin x\cos 3x}_{\sin 4x})=0$$

$$\xrightarrow{\div(1-\tan x\tan 2x)}\tan 3x\sin 4x=0\ \Rightarrow\begin{cases}\tan 3x=0\ \Rightarrow\ 3x=k\pi\ \Rightarrow\ x=\dfrac{k\pi}{3}\\ \sin 4x=0\ \Rightarrow\ 4x=k\pi\ \Rightarrow\ x=\dfrac{k\pi}{4}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\in[0,\pi]}\begin{cases}k=0\ \Rightarrow\ x=0\\ k=1\ \Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{3}\,,x=\dfrac{\pi}{4}\\ k=2\ \Rightarrow\ x=\dfrac{2\pi}{3}\,,x=\dfrac{\pi}{2}\\ k=3\ \Rightarrow\ x=\pi\,,x=\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$

توجه کنید $x=\frac{\pi}{4}$، $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{4}$ غیرقابل قبول هستند، زیرا به‌ازای این مقادیر معادله داده شده، تعریف نشده می‌شود، بنابراین معادله دارای چهار جواب در بازه $[0,\pi]$ است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۴- گزینه «۳» ـ

$$\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 70^\circ \cos 20^\circ = \sin(20^\circ + 70^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \ \sin 70^\circ \cos 20^\circ = 1 - \sin 20^\circ \cos 70^\circ$$

$$\Rightarrow \ \frac{1-\sin 20^\circ \cos 70^\circ}{\sin 55^\circ \cos 55^\circ} = \frac{\sin 70^\circ \cos 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 110^\circ} = \frac{\sin 70^\circ \cos 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 70^\circ} = 2\cos 20^\circ$$

$$\Rightarrow \ 2\cos 20^\circ = a \ \Rightarrow \ \cos 20^\circ = \frac{a}{2} \ \Rightarrow \ \sin 20^\circ = \sqrt{1-\frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \ \sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \ \Rightarrow \ \sin 40^\circ = 2\times\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\times\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{4-a^2}}{2}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس چهارم ـ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا)

۱۵- گزینه «۱» ـ

$$\sin 125^\circ = \sin(90^\circ + 35^\circ) = \cos 35^\circ$$

$$\sin 215^\circ = \sin(180^\circ + 35^\circ) = -\sin 35^\circ$$

$$\Rightarrow \ \sin^2 125^\circ - \sin^2 215^\circ = \cos^2 35^\circ - \sin^2 35^\circ = \cos(2\times 35^\circ) = \cos 70^\circ$$

$$\Rightarrow \ \cos 70^\circ = 0/3 \ \Rightarrow \ \sin 70^\circ = \sqrt{1-(\frac{3}{10})^2} = \frac{\sqrt{91}}{10}$$

$$\cos 100^\circ = \cos(70^\circ + 30^\circ) = \cos 70^\circ \cos 30^\circ - \sin 70^\circ \sin 30^\circ = \frac{3}{10}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{91}}{10}\times\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{91}}{20}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس چهارم ـ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا)

۱۶- گزینه «۲» ـ

$$\sqrt[4]{10\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\sqrt{10^2\times 3}} = \sqrt[8]{300}$$

با توجه به اینکه: $6561 = 3^8$, $256 = 2^8$, $1 = 1^8$ نتیجه می‌شود $3 > \sqrt[8]{300} > 2$، بنابراین $2 = [\sqrt[8]{300}] = [\sqrt[4]{10\sqrt{3}}]$ از طرف دیگر چون $27 = 3^3$ و $64 = 4^3$ پس $4 > \sqrt[3]{47} > 3$ است. در نتیجه گزینه‌های «۳» و «۴» نادرست هستند. بین گزینه‌های «۱» و «۲» هم گزینه «۲» را انتخاب می‌کنیم، زیرا ۴۷ به ۶۴ نزدیک‌تر است تا به ۲۷، پس مقدار $3/5 < \sqrt[3]{47}$ است. یعنی مقدار ۳/۶ را برای $\sqrt[3]{47}$ انتخاب می‌کنیم.

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ریشه n ام)

۱۷- گزینه «۴» ـ روش اول: عبارت $x^4 + 64$ را به‌صورت زیر می‌توانیم تجزیه کنیم:

$$x^4 + 64 = (x^2+8)^2 - 16x^2 \overset{\text{مزدوج}}{=\!=\!=} ((x^2+8)-4x)((x^2+8)+4x) \ \Rightarrow \ (x^4+64) = (x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$$

$$\frac{1}{x^2-4x+8} + \frac{x^4-x^2-4x+56}{x^4+64} = \frac{x^2+4x+8+x^4-x^2-4x+56}{x^4+64} = \frac{x^4+64}{x^4+64} = 1$$

روش دوم: اگر قرار دهیم $x = 1$ ، آن‌گاه حاصل عبارت داده شده، ۱ می‌شود و در بین گزینه‌ها، فقط گزینه «۴» قابل قبول می‌شود.

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس چهارم ـ عبارت‌های جبری)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [\sin\pi(x+1)] + a = [\sin\pi^+] + a = [0^-] + a = -1 + a \\
&\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\sqrt[3]{\tan x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\tan^2 x \sin^2 x}{\sqrt[3]{\tan x}} = \lim_{x\to 0^-} \tan^{\frac{5}{3}} x \sin^2 x = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \ -1 + a = 0 \ \Rightarrow \ a = 1$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۹- گزینه «۲» ـ نکته: اگر $x \to 0$ ، هم ارزی زیر را داریم:

$$(1+ax)^n \sim 1+nax$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}\sqrt[3]{1-6x}-(1+2x)^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{1}{2}\times 4x)(1-\frac{1}{3}\times 6x)-(1+2\times 2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)(1-2x)-(1+4x)}{x}$$

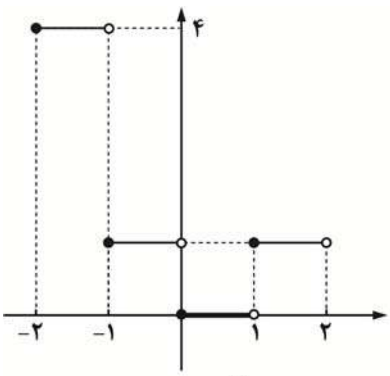
$$=\lim\frac{1-4x^2-1-4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x(x+1)}{x}=-4$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه دو توابع)

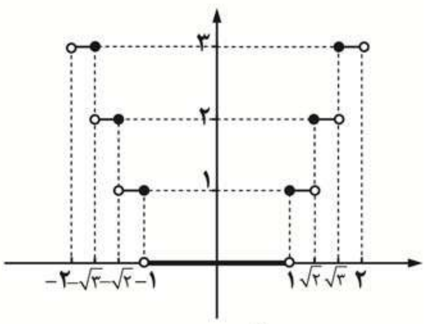
۲۰- گزینه «۱» ـ توابع جزء صحیح در نقاطی که عبارت درون آن عدد صحیح می‌شود، حد ندارند و در نتیجه پیوسته نیستند، مگـر ایـن‌کـه در آن نقطه دارای می‌نیمم یا ماکزیمم باشند، بنابراین در بازه $(-2\,,2)$ تابع $f(x)=[x^2]$ در نقاط $x=\pm 1\,,\pm\sqrt{2}\,,\pm\sqrt{3}$ پیوسته نیست. توجه کنید که f در $x=0$ دارای می‌نیمم است، پس در این نقطه پیوسته است.

$$(\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}[x^2]=[0^+]=0\,,\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}[x^2]=[0^+]=0)$$

و تابع $g(x)=[x]^2$ در نقاط ± 1 و $x=0$ پیوسته نیست.



$g(x)=[x]^2$



$f(x)=[x^2]$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل ششم ـ درس سوم ـ پیوستگی)