حسابان

۱- گزینه «۳» ـ

$$f(x)=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)\cos ۲x=\cos x\sin x\cos ۲x$$

$$f(x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۴}\sin ۴x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب)

۲- گزینه «۱» ـ کمترین مقدار این تابع برابر ۳- است پس:

$$-۳\sin(۳\pi x-\frac{\pi}{۴})=-۳ \Rightarrow \sin(۳\pi x-\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow ۳\pi x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۳\pi x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} \xrightarrow{\div ۳\pi} x=\frac{۲k}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۸k+۳}{۱۲}$$

به‌ازای $k=۰$، مقدار x برابر $\frac{۱}{۴}$ به‌دست می‌آید. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادلات مثلثاتی)

۳- گزینه «۴» ـ بیشترین مقدار تابع $۱=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}$ می‌باشد پس $a=۱$ است، نقاط برخورد تابع با محور xها را به‌دست می‌آوریم.

$$y=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\cos ۲x+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow \cos ۲x=-۱ \Rightarrow ۲x=۲k\pi+\pi \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} k=۰ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲} \\ k=۱ \Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow b=\frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

در نتیجه $a+b$ برابر $۱+\frac{۳\pi}{۲}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نمودارشناسی)

۴- گزینه «۱» ـ

$$\sin(۲\alpha-\frac{\pi}{۲})=\sin(-(\frac{\pi}{۲}-۲\alpha))=-\sin(\frac{\pi}{۲}-۲\alpha)=-\cos ۲\alpha=-(۱-۲\sin^۲\alpha)=۲\sin^۲\alpha-۱=۲(\frac{۱۶}{۲۵})-۱=\frac{۳۲-۲۵}{۲۵}=\frac{۷}{۲۵}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نسبت‌های ۲α)

۵- گزینه «۳» ـ

$$\cos^۲ x-\cos^۲(\frac{\pi}{۲}+x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \cos^۲ x-\sin^۲ x=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \cos ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۱۲}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\pi+\frac{\pi}{۱۲}$ $\pi-\frac{\pi}{۱۲}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی)

۶- گزینه «۴» ـ توجه کنید که دوره تناوب تابع $f(ax)$، $\frac{۱}{|a|}$ برابر دوره تناوب $f(x)$ است.

$$T_{f(\frac{۱}{۲}x)}=۲T_{f(x)} \Rightarrow T_{f(x)}=\frac{۱}{۶}$$

$$T_{g(x)}=\frac{۱}{|-\frac{۱}{۳}|}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب)

۷- گزینه «۳» ـ

$$\sin^۲ x - ۲\sin x + ۴ = ۳ + (\sin x - ۱)^۲ \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۳ + (\sin x - ۱)^۲}$$

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \xrightarrow{-۱} -۲ \le \sin x - ۱ \le ۰ \Rightarrow ۰ \le (\sin x - ۱)^۲ \le ۴ \Rightarrow ۳ \le ۳ + (\sin x - ۱)^۲ \le ۷ \Rightarrow \frac{۱}{۷} \le f(x) \le \frac{۱}{۳}$$

(نصیری) (دوازدهم ـ مثلثات ـ برد)

۸- گزینه «۴» ـ به کمک اتحاد $a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)$ و با انتخاب $a = \tan\alpha$ ، $b = \cot\alpha$ داریم:

$$y = x^۳ - ۳x$$

(نصیری) (پایه دهم ـ مثلثات ـ مثلثات و اتحادها)

۹- گزینه «۴» ـ

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\alpha = ۴\beta} ۴\beta + \beta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{۱۰}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ رادیان)

۱۰- گزینه «۱» ـ چون $\frac{\pi}{۷} + \frac{۶\pi}{۷} = \pi$ است، پس $\tan\frac{\pi}{۷} + \tan\frac{۶\pi}{۷} = ۰$ است و معادله به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$۲\tan\alpha = ۰ \Rightarrow \tan\alpha = ۰ \Rightarrow \alpha = k\pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله)

۱۱- گزینه «۲» ـ

$$\tan(\pi - \alpha + \beta) = ۱۰ \Rightarrow \tan(\beta - \alpha) = ۱۰$$

$$\cot(\frac{۳\pi}{۲} - \beta) = ۲ \Rightarrow \tan\beta = ۲$$

$$\tan(\beta - \alpha) = ۱۰ \Rightarrow \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{۱ + \tan\beta\tan\alpha} = ۱۰ \Rightarrow \frac{۲ - \tan\alpha}{۱ + ۲\tan\alpha} = ۱۰ \Rightarrow ۱۰ + ۲۰\tan\alpha = ۲ - \tan\alpha \Rightarrow ۲۱\tan\alpha = -۸ \Rightarrow \tan\alpha = \frac{-۸}{۲۱}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ $\alpha+\beta$)

۱۲- گزینه «۳» ـ

$$۴a^۲ - b^۲ = ۹۱ \Rightarrow (۲a - b)(۲a + b) = ۹۱ \xrightarrow{b+۲a=۷} ۲a - b = ۱۳$$

$$\begin{cases} ۲a - b = ۱۳ \\ b + ۲a = ۷ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴a = ۲۰ \Rightarrow a = ۵ ، b = -۳ \Rightarrow b - ۲a = -۱۳$$

(نصیری) (پایه دهم ـ اتحاد ـ اتحاد مزدوج)

۱۳- گزینه «۲» ـ

$$\sqrt{\sqrt{۶} - (\sqrt{۲} - ۱)} \times \sqrt{\sqrt{۶} + (\sqrt{۲} - ۱)} = \sqrt{(\sqrt{۶})^۲ - (\sqrt{۲} - ۱)^۲} = \sqrt{۶ - (۲ + ۱ - ۲\sqrt{۲})} = \sqrt{۳ + ۲\sqrt{۲}} = \sqrt{(\sqrt{۲} + ۱)^۲} = \sqrt{۲} + ۱$$

(نصیری) (پایه دهم ـ ریشه ـ محاسبات رادیکالی)

۱۴- گزینه «۳» ـ

$$A = \frac{۷}{۸} + ۳\sqrt{\frac{۱۶ + ۹}{۹ \times ۴}} = \frac{۷}{۸} + ۳\sqrt{\frac{۲۵}{۳۶}} = \frac{۷}{۸} + ۳ \times \frac{۵}{۶} = \frac{۷}{۸} + \frac{۵}{۲} = \frac{۲۷}{۸}$$

$$\sqrt[۳]{A} = \sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۸}} = \frac{۳}{۲}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ ریشه و توان ـ ریشه سوم)

۱۵- گزینه «۲» ـ

$$a = \frac{۱ - \sqrt{۲}}{(۱ + \sqrt{۲})(۱ - \sqrt{۲})} + \frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})} + \frac{۲ - \sqrt{۳}}{(۲ + \sqrt{۳})(۲ - \sqrt{۳})} + \frac{۲ - \sqrt{۵}}{(۲ + \sqrt{۵})(۲ - \sqrt{۵})}$$

$$a = \frac{۱ - \sqrt{۲}}{۱ - ۲} + \frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{۳ - ۲} + \frac{۲ - \sqrt{۳}}{۴ - ۳} + \frac{۲ - \sqrt{۵}}{۴ - ۵} \Rightarrow a = \sqrt{۲} - ۱ + \sqrt{۳} - \sqrt{۲} + ۲ - \sqrt{۳} - ۲ + \sqrt{۵} = \sqrt{۵} - ۱$$

$$(۱ + \sqrt{۵})a = (۱ + \sqrt{۵})(\sqrt{۵} - ۱) = ۵ - ۱ = ۴$$

(نصیری) (پایه دهم ـ رادیکال‌ها ـ گویا کردن)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$x^{۳} - ۵x^{۲} - ۶x = x(x^{۲} - ۵x - ۶) = x(x - ۶)(x + ۱)$$

(نصیری) (پایه دهم ـ اتحاد و تجزیه ـ تجزیه)