حسابان

۱- گزینه «۳» ـ با فرض $x>0$ طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$x=\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{7+2\sqrt{10}} \Rightarrow x^2=7-2\sqrt{10}+7+2\sqrt{10}+2\sqrt{(7-2\sqrt{10})(7+2\sqrt{10})}$$

$$x^2=14+2\sqrt{49-40}=14+2\times 3=20 \xrightarrow{x>0} x=2\sqrt{5}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ رادیکال‌ها) (متوسط)

۲- گزینه «۲» ـ

$$A=(x+\sqrt[3]{x})+|x-\sqrt[3]{x}| \xrightarrow[x\geq\sqrt[3]{x}]{x\geq 1} A=x+\sqrt[3]{x}+x-\sqrt[3]{x} \Rightarrow A=2x$$

(نصیری) (پایه دهم ـ ریشه و توان) (آسان)

۳- گزینه «۴» ـ

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=-2 \Rightarrow 1-\sqrt{x}=-8 \Rightarrow \sqrt{x}=9 \Rightarrow x=81 \Rightarrow x+19=100$$

ریشه‌های دوم عدد $x+19$ برابر ۱۰ و ۱۰- است. (نصیری) (پایه دهم ـ ریشه و توان) (آسان)

۴- گزینه «۳» ـ عبارت $a^{\frac{1}{n}}$ برای $n\in\mathbb{N}$ و $a>0$ تعریف می‌شود.

$$\frac{1-x}{1+x}>0 \Rightarrow -1<x<1$$

(نصیری) (پایه دهم ـ ریشه و توان) (متوسط)

۵- گزینه «۴» ـ به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$(\sqrt{2+x}+\sqrt{12+x})(\sqrt{2+x}-\sqrt{12+x})=(2+x)-(12-x) \Rightarrow 5(\sqrt{2+x}-\sqrt{12+x})=-10 \Rightarrow \sqrt{12+x}-\sqrt{2+x}=2$$

$$\begin{cases}\sqrt{2+x}+\sqrt{12+x}=5\\ \sqrt{12+x}-\sqrt{2+x}=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{2+x}=\frac{3}{2}\\ \sqrt{12+x}=\frac{7}{2}\end{cases} \Rightarrow A=2\times\frac{3}{2}(1+\frac{7}{2})=13/5$$

(نصیری) (پایه دهم ـ اتحادها) (متوسط)

۶- گزینه «۱» ـ از اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt{3}$$

$$A=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1-\sqrt{3}-2-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt{3}=-1$$

(نصیری) (پایه دهم ـ رادیکال‌ها ـ گویا کردن) (متوسط)

۷- گزینه «۴» ـ

$$\sin(\frac{7\pi}{2}+\alpha)=\frac{1}{3} \Rightarrow -\cos\alpha=\frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{3}$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2(-\frac{1}{3})^2-1=\frac{2}{9}-1=-\frac{7}{9}$$

$$\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=2(-\frac{7}{9})^2-1=\frac{2\times 49}{81}-1=\frac{17}{81}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نسبت‌های 2α) (متوسط)

۸- گزینه «۳» ـ

$$\tan(\pi+\alpha-\beta)=4 \Rightarrow \tan(\alpha-\beta)=4 \Rightarrow \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=4 \quad (1)$$

$$\cot(\frac{11\pi}{2}+\beta)=3 \Rightarrow \cot(5\pi+\frac{\pi}{2}+\beta)=3 \Rightarrow \cot(\frac{\pi}{2}+\beta)=3$$

$$\Rightarrow -\tan\beta=3 \Rightarrow \tan\beta=-3 \xrightarrow{(1)} \frac{\tan\alpha+3}{1-3\tan\alpha}=4 \Rightarrow 4-12\tan\alpha=\tan\alpha+3 \Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{13} \Rightarrow \cot\alpha=13$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ نسبت‌های $\alpha\pm\beta$) (متوسط)

۹- گزینه «۴» ـ الف) تابع تانژانت در هر بازه‌ای که تعریف می‌شود، صعودی اکید است.

ب) دوره تناوب تابع $\sin\frac{۳x}{۲}$ برابر است با:

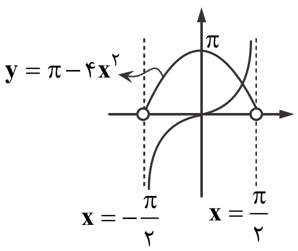
$$T=\frac{۲\pi}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴\pi}{۳}$$

پ) بیش‌ترین مقدار تابع $۳\sin^۲ x-۱$ برابر است با:

$$\max y=۳\times۱-۱=۲$$

پس همه جمله‌ها صحیح است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تناوب و تانژانت) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» ـ معادله را به‌صورت $\tan x=\pi-۴x^۲$ تبدیل می‌کنیم و دو تابع $\begin{cases}f(x)=\tan x\\ g(x)=\pi-۴x^۲\end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که دو تابع f و g یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع تانژانت) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=m\cos m(x-\frac{۹\pi}{۲m})=m\cos(mx-\frac{۹\pi}{۲})=m\sin mx$$

چون ضریب x و ضریب کمان هر دو m و هم‌علامت هستند، پس کافی است که $m\neq ۰$ باشد تا نمودار صحیح باشد.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تناوب) (دشوار)

۱۲- گزینه «۳» ـ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{۱-\sqrt{۲}\sin x\cos x}=\frac{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{۱-\sqrt{۲}\sin x\cos x}$$

$$f(x)=\frac{(۱-\sqrt{۲}\sin x\cos x)(۱+\sqrt{۲}\sin x\cos x)}{۱-\sqrt{۲}\sin x\cos x}=۱+\sqrt{۲}\sin x\cos x=۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲x\ \Rightarrow\ T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تناوب) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» ـ

$$\frac{\tan^۲ x}{\sin x(۱+\tan^۲ x)}=۱\Rightarrow\frac{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{(\sin x)\times\frac{۱}{\cos^۲ x}}=۱\Rightarrow\sin x=۱$$

دقت کنید که وقتی $\sin x=۱$ است، در این صورت $\tan x$ تعریف نمی‌شود، پس معادله فاقد جواب است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (دشوار)

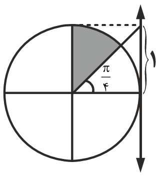
۱۴- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=۳-\frac{۱}{۴}\cos(x-۱)\ \Rightarrow\ \max f(x)=۳+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۳}{۴}$$

$$g(x)=f(x)+۱=۴-\frac{۱}{۴}\cos(x-۱)\ \Rightarrow\ \min g(x)=۴-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۵}{۴}$$

$$\min g(x)-\max f(x)=\frac{۱۵}{۴}-\frac{۱۳}{۴}=۰/۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ برد مثلثاتی) (آسان)



۱۵- گزینه «۱» ـ اگر α در فاصله $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ تغییر کند، در این صورت $\tan\alpha > 1$ خواهد بود. پس:

$$\frac{m}{2} > 1 \Rightarrow m > 2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تابع تانژانت) (آسان)

۱۶- گزینه «۳» ـ

$$2\sin^2 x - 1 = \sin 4x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin(-4x) \Rightarrow \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 4x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 4x \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 4x \end{cases}$$

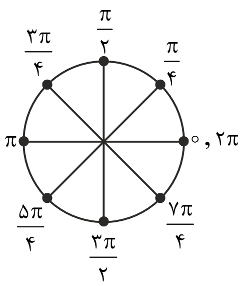
$$\Rightarrow \begin{cases} -2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 6x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (متوسط)

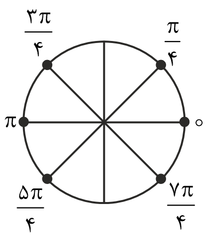
۱۷- گزینه «۲» ـ

$$\tan 3x = -\tan x \Rightarrow \tan 3x = \tan(-x) \Rightarrow 3x = k\pi - x \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

به جست‌وجوی جواب‌های قابل قبول می‌رویم، جواب‌ها را در یک دور دایره مثلثاتی ببینید:



جواب‌های قابل قبول را در دایره زیر ببینید:



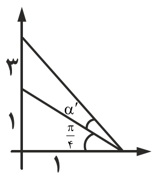
پس جواب‌های معادله فوق برابر است با:

$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi \end{cases}$$

دقت کنید که نقاط $k\pi + \frac{\pi}{2}$ قابل قبول نیستند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی) (دشوار)

۱۸- گزینه «۲» ـ در حالت داده شده $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta) = 2 \xrightarrow{\tan\beta = \frac{1}{2}} \frac{\tan\alpha + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\tan\alpha} = 2 \Rightarrow \tan\alpha + \frac{1}{2} = 2 - \tan\alpha \Rightarrow 2\tan\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4}$$



اگر M را یک واحد به سمت مبدأ حرکت دهیم، شکل زیر پدید می‌آید:

$$\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha') = 4 \Rightarrow \frac{1 + \tan\alpha'}{1 - \tan\alpha'} = 4 \Rightarrow 4 - 4\tan\alpha' = 1 + \tan\alpha' \Rightarrow 5\tan\alpha' = 3 \Rightarrow \tan\alpha' = \frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha - \tan\alpha' = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = 0/75 - 0/6 = 0/15$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ روابط $\alpha+\beta$) (دشوار)

۱۹- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=\frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}}=\tan x \Rightarrow T=\pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تناوب و تانژانت) (آسان)

۲۰- گزینه «۳» ـ

$$f(x)=\frac{2\sin 6x\cos 6x}{\sin(2x+4x)}=2\cos 6x \Rightarrow T=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب) (آسان)