۱- گزینه «۳» ـ طبق فرض:

$$\begin{cases} m = 19q_1 + 9 \\ n = 19q_2 + 3 \end{cases}$$

اکنون می‌نویسیم:

$$m - 4n = (19q_1 + 9) - 4(19q_2 + 3) = 19q_1 + 9 - 4(19)q_2 - 12 = 19(q_1 - 4q_2) - 3 = 19(q_1 - 4q_2) - 3 + 19 - 19 =$$
$$= 19(\underbrace{q_1 - 4q_2 - 1}_{q}) - 3 + 19$$

در نتیجه $m - 4n = 19q + 16$. یعنی باقی‌مانده $m - 4n$ بر ۱۹ برابر ۱۶ است.

(هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ قضیه تقسیم و کاربردها ـ الگوریتم تقسیم)

۲- گزینه «۳» ـ بنابر فرض:

$$\begin{cases} a = 3q_1 + 1 \\ a = 8q_2 + 7 \end{cases}$$

اکنون می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 8a = 24q_1 + 8 \\ 3a = 24q_2 + 21 \end{cases}$$

با کم کردن برابری‌های بالا به‌دست می‌آید:

$$5a = 24(q_1 - q_2) - 13 = 24(q_1 - q_2) - 13 + 24 - 24 = 24(\underbrace{q_1 - q_2 - 1}_{q}) - 13 + 24 = 27q + 11$$

چون سمت چپ برابری $5a = 24q + 11$ بر ۵ بخش‌پذیر است، پس سمت راست هم باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد، لذا q به فرم $5k + 1$ است:

$$5a = 24(5k + 1) + 11 = 24 \times 5k + 35 \Rightarrow a = 24k + 7$$

یعنی باقی‌مانده a بر ۲۴ برابر ۷ است. (هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ قضیه تقسیم و افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ ـ الگوریتم تقسیم ـ افراز $\mathbb{Z}$)

۳- گزینه «۱» ـ چون a عددی فرد است، پس $a + 8$ هم عددی فرد است. در نتیجه تمام مقسوم علیه‌های آن عددی فرد هستند، در نهایت نتیجه می‌گیریم b هم عددی فرد است. می‌دانیم مربع هر عدد فرد به شکل $8k + 1$ است:

$$a = 8k_1 + 1, b = 8k_2 + 1$$

اکنون می‌نویسیم:

$$a^2 - b^2 + 18 = 8k_1 + 1 - 8k_2 - 1 + 18 = 8k_1 - 8k_2 + 16 + 2 = 8(\underbrace{k_1 - k_2 + 2}_{q}) + 2$$

به‌دست می‌آید:

$$a^2 - b^2 + 18 = 8q + 2$$

در نتیجه باقی‌مانده تقسیم $a^2 - b^2 + 18$ بر ۸ برابر ۲ است. (هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ ـ افراز)

۴- گزینه «۴» ـ بنابر تعریف:

$$A = [3]_{15} = \{15x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = [5]_{24} = \{24y + 5 \mid y \in \mathbb{Z}\}$$

عضوهای $A \cap B$ از برابری $15x + 3 = 24y + 5$ به‌دست می‌آید:

$$15x + 3 = 24y + 5 \Rightarrow 15x - 24y = 2$$

چون $(15, -24) = 3 \nmid 2$ پس این معادله سیاله جواب ندارد. یعنی $A \cap B = \varnothing$

(هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ هم‌نهشتی ـ دسته هم‌نهشتی و معادله سیاله)

۵- گزینه «۳» ـ می‌دانیم اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n \mid m$ آن‌گاه $a \overset{n}{\equiv} b$.

بنابراین به‌ازای هر عدد طبیعی n، اگر $n \mid 48$ می‌توان نوشت: $a \overset{n}{\equiv} b$

در بین گزینه‌ها چون $12 \mid 48$ و $16 \mid 48$ پس از $a \overset{48}{\equiv} b$ نتیجه می‌گیریم: $a \overset{16}{\equiv} b , a \overset{12}{\equiv} b$

(هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ هم‌نهشتی ـ مفاهیم اولیه هم‌نهشتی)

۶- گزینه «۴» ـ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \alpha \mid 8n + 3 \\ \alpha \mid 5n - 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha \mid 5(8n + 3) - 8(5n - 2) \Rightarrow \alpha \mid 31$$

چون $\alpha > 1$ و ۳۱ عددی اول است، پس $\alpha = 31$. بنابراین $31 \mid 5n - 2$ در نتیجه:

$$5n - 2 \overset{31}{\equiv} 0 \Rightarrow 5n \overset{31}{\equiv} 2 \overset{31}{\equiv} 2 - 2 \times 31 \overset{31}{\equiv} -60 \Rightarrow n \overset{31}{\equiv} -12$$

یعنی $n = 31k - 12$

کوچکترین عدد طبیعی مورد قبول برای n عدد $31 \times 1 - 12 = 19$ است و مجموع ارقام آن برابر ۱۰ است.

(هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ هم‌نهشتی ـ معادله هم‌نهشتی)

۷- گزینه «۲» ـ می‌توان نوشت:

$$2^5 \overset{11}{\equiv} -1$$

در نتیجه:

$$(2^5)^8 \overset{11}{\equiv} (-1)^8 \Rightarrow 2^{40} \overset{11}{\equiv} 1$$

دو طرف را در $8 = 2^3$ ضرب می‌کنیم:

$$2^{43} \overset{11}{\equiv} 8 \Rightarrow 2^{43} + a \overset{11}{\equiv} 8 + a$$

بنابر فرض مسئله:

$$8 + a \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 3$$

پس کوچکترین مقدار طبیعی a برابر ۳ است. (هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ هم‌نهشتی ـ معادله هم‌نهشتی)

۸- گزینه «۳» ـ چون $\overline{a21b31}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است پس:

$$(1+b+2)-(3+1+a) \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b-a-1 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b \overset{11}{\equiv} a+1$$

چون a و b رقم هستند و $a \neq 0$ پس:

$$a = 1 \Rightarrow b = 2$$
$$a = 2 \Rightarrow b = 3$$
$$\vdots$$
$$a = 8 \Rightarrow b = 9$$

بنابراین ۸ مقدار برای عدد مورد نظر به‌دست می‌آید.

(هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ هم‌نهشتی ـ بخش‌پذیری بر ۱۱)

۹- گزینه «۴» ـ عدد داده شده را به پیمانه ۱۰ به‌دست می‌آوریم:

$$1 + 2^2 + 6^3 + 24^4 + 0 + 0 + \ldots \overset{10}{\equiv} 1+4+6+6 \overset{10}{\equiv} 7$$

(هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ هم‌نهشتی ـ رقم یکان)

۱۰- گزینه «۳» ـ معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: $3x \overset{2}{\equiv} 4, (3, 2) = 1 \mid 4 \Rightarrow$ جواب دارد

گزینه «۲»: $4x \overset{6}{\equiv} 18, (4, 6) = 2 \mid 18 \Rightarrow$ جواب دارد

گزینه «۳»: $6x \overset{9}{\equiv} 11, (6, 9) = 3 \nmid 11 \Rightarrow$ جواب ندارد

گزینه «۴»: $5x \overset{7}{\equiv} 1, (5, 7) = 1 \mid 1 \Rightarrow$ جواب دارد

(هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ هم‌نهشتی ـ شرط جواب معادله هم‌نهشتی)

۱۱- گزینه «۳» ـ کافی است جواب‌های عمومی معادله $13x + 17y = 91$ را (برحسب k) بیابیم:

$$13x + 17y = 91 \Rightarrow 17y \overset{13}{\equiv} 91 \Rightarrow 4y \overset{13}{\equiv} 0 \Rightarrow y \overset{13}{\equiv} 0$$

یعنی $y = 13k$. این برابری را در معادله اولیه قرار می‌دهیم:

$$13x + 17(13k) = 91 \Rightarrow x + 17k = 7 \Rightarrow x = 7 - 17k$$

اکنون می‌نویسیم:

$$x + 2y = (7-17k) + 2(13k) = 7 - 17k + 26k = 9k + 7$$

(هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ هم‌نهشتی ـ معادله سیاله)

۱۲- گزینه «۳» ـ جواب‌های مسئله، برابر تعداد جواب‌های طبیعی معادله سیاله $4x + 9y = 101$ است:

$$4x + 9y = 101 \Rightarrow 4x \overset{9}{\equiv} 101 \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow 2x \overset{9}{\equiv} 1 \overset{9}{\equiv} 1 + 9 \overset{9}{\equiv} 10 \xrightarrow{(2,9)=1} x \overset{9}{\equiv} 5 \Rightarrow x = 9k + 5$$

این برابری را در معادله سیاله اولیه قرار می‌دهیم:

$$4(9k+5) + 9y = 101 \Rightarrow y = 9 - 4k$$

چون x و y طبیعی هستند، پس:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k + 5 \geq 1 \\ 9 - 4k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ 2 \geq k \end{cases} \Rightarrow 0 \leq k \leq 2$$

پس ۳ مقدار طبیعی برای x و y به‌دست می‌آید.

(هویدی) (فصل اول ـ درس سوم ـ هم‌نهشتی ـ معادله سیاله)