ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» ـ برای این‌که برابری $a = 12q - 5$ را به فرم الگوریتم تقسیم درآوریم کافی است به سمت راست این برابری ۱۲ واحد اضافه کنیم و ۱۲ واحد از آن کم کنیم:

$$a = 12q - 5 + 12 - 12 = 12\underbrace{(q-1)}_{k} + 7 = 12k + 7$$

اکنون از برابری $a = 12k + 7$ و با توجه به الگوریتم تقسیم نتیجه می‌گیریم باقیمانده تقسیم عدد a بر ۱۲ برابر ۷ است.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ الگوریتم تقسیم)

۲- گزینه «۳» ـ می‌نویسیم:

$$\begin{matrix} m = 11q_1 + 2 : \text{طبق فرض} \\ n = 11q_2 + 4 : \text{طبق فرض} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 3 \times 11q_1 + 6 \\ 2n = 2 \times 11q_2 + 8 \end{cases} \Rightarrow 3m - 2n = 11(3q_1 - 2q_2) - 2$$

$$= 11(3q_1 - 2q_2) - 2 + 11 - 11 = 11\underbrace{(3q_1 - 2q_2 - 1)}_{q_3} + 11 - 2 = 11q_3 + 9 \Rightarrow r = 9$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ الگوریتم تقسیم)

۳- گزینه «۱» ـ می‌دانیم اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود. بنابراین باقیمانده تقسیم p بر ۶ برابر ۱ یا ۵ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم)

۴- گزینه «۳» ـ چون $a , b \in [r]_7$ پس:

$$a = 7k_1 + r \quad \text{و} \quad b = 7k_2 + r$$

در نتیجه می‌نویسیم:

$$3a - 2b \overset{7}{\equiv} 11 \Rightarrow 3(7k_1 + r) - 2(7k_2 + r) \overset{7}{\equiv} 11$$

چون $11 \overset{7}{\equiv} 3$ و $7 \overset{7}{\equiv} 0$ پس:

$$3r - 2r \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow r \overset{7}{\equiv} 3$$

در نهایت به‌دست می‌آید:

$$ab \overset{7}{\equiv} (7k_1 + 3)(7k_2 + 3) \overset{7}{\equiv} 3 \times 3 \overset{7}{\equiv} 9 \overset{7}{\equiv} 2$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ کلاس هم‌نهشتی r به پیمانه m)

۵- گزینه «۳» ـ ابتدا توان‌های ۱۰ را به پیمانه ۳ تا جایی به‌دست می‌آوریم، تا عددی ساده‌تر (ترجیحاً ۱ یا ۱−) شود:

$$10 \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow 10^3 \overset{7}{\equiv} 27 \overset{7}{\equiv} -1$$

از طرف دیگر $19 \overset{7}{\equiv} -2$ و $31 \overset{7}{\equiv} 3$. اکنون می‌نویسیم:

$$A = 10^{39} \times 19 + 31 \overset{7}{\equiv} (-1)^{39} \times (-2) + 3 \overset{7}{\equiv} 2 + 3 \overset{7}{\equiv} 5$$

چون ۵ کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با A به پیمانه ۷ است، پس باقیمانده تقسیم عدد A بر ۷ برابر ۵ است.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ ویژگی‌های هم‌نهشتی)

۶- گزینه «۴» ـ ابتدا دو طرف رابطه هم‌نهشتی $36a \overset{84}{\equiv} 192$ را به ۱۲ ساده می‌کنیم تا پیمانه عدد ۷ شود. (دقت کنید که $(12 , 84) = 12$)

$$3a \overset{7}{\equiv} 16 \xrightarrow{16 \overset{7}{\equiv} 2} 3a \overset{7}{\equiv} 2$$

بنابراین گزینه «۴» درست است. (کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ ویژگی‌های هم‌نهشتی ـ تقسیم دو طرف)

۷- گزینه «۱» ـ به سادگی به‌دست می‌آید:

$$A - B = ۲!$$

از طرف دیگر:

$$\left.\begin{array}{l} A \overset{۴}{\equiv} ۲! + ۳! + ۰ + \cdots \overset{۴}{\equiv} ۰ \\ B \overset{۴}{\equiv} ۳! + ۰ + \cdots \overset{۴}{\equiv} ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow A + B \overset{۴}{\equiv} ۲$$

اکنون در پیمانه ۱۰ می‌نویسیم:

$$(A - B)^{A+B} \equiv ۲^۲ \equiv ۴$$

یعنی رقم یکان عدد $(A - B)^{A+B}$ برابر ۴ است.

(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ پیدا کردن رقم یکان)

۸- گزینه «۱» ـ ابتدا دو طرف معادله را به عدد ۳ ساده می‌کنیم:

$$۱۹x - ۲۹y = ۱۱۴$$

با کمی دقت می‌توان $x_۰ = ۶$ و $y_۰ = ۰$ را به‌عنوان یک جواب برای این معادله به‌دست آورد. اکنون می‌توان جواب‌های کلی این معادله را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x = ۶ - ۲۹k \\ y = ۰ - ۱۹k \end{cases}$$

در نهایت به ازای $k = -۴$ کوچک‌ترین عدد سه رقمی طبیعی x به‌دست می‌آید:

$$x = ۶ - ۲۹ \times (-۴) = ۱۲۲$$

مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی x برابر $۱ + ۲ + ۲ = ۵$ است. (کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادله سیاله)

۹- گزینه «۳» ـ عدد موردنظر را $\overline{ab}$ در نظر می‌گیریم. باید $b - a$ را به‌دست آوریم. بنابر فرض مسئله:

$$\overline{ba} = \overline{ab} + ۳۶ \Rightarrow ۱۰b + a = ۱۰a + b + ۳۶ \Rightarrow ۹(b - a) = ۳۶ \Rightarrow b - a = ۴$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ بسط دادن عددها)

۱۰- گزینه «۳» ـ بنابر فرض مسئله به‌دست می‌آید $۲۵a - ۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۰$ پس $۲۵a \overset{۱۱}{\equiv} ۱$.

در نتیجه:

$$۲۵a - ۲۲a \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳a \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲$$

دو طرف رابطه اخیر را به عدد ۳ ساده می‌کنیم:

$$a \overset{۱۱}{\equiv} ۴$$

یعنی $a = ۱۱k + ۴$. بزرگ‌ترین عدد دو رقمی برای a برابر ۹۲ است.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات هم‌نهشتی)

۱۱- گزینه «۲» ـ فرض می‌کنیم ۱۳ مرداد aامین و اول بهمن bامین روز سال باشند. در این صورت:

$$a = ۴ \times ۳۱ + ۱۳ \overset{۷}{\equiv} ۴ \times ۳ + (-۱) \overset{۷}{\equiv} ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

$$b = ۶ \times ۳۱ + ۴ \times ۳۰ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۶ \times ۳ + ۴ \times ۲ + ۱ \overset{۷}{\equiv} -۳ + ۱ + ۱ \overset{۷}{\equiv} -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

اکنون توجه کنید که ۱۳ مرداد مانند روز چهارم سال و اول بهمن مانند روز ششم سال است. پس روز چهارم، جمعه است و در نتیجه روز ششم سال یکشنبه است. پس اولین سه‌شنبه بهمن‌ماه، می‌شود ۳ بهمن و در نهایت دومین سه‌شنبه می‌شود دهم بهمن‌ماه.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تقویم‌نگاری)

۱۲- گزینه «۲» ـ ابتدا عبارت‌های داده شده را ساده می‌کنیم و سپس با ویژگی‌های هم‌نهشتی پیمانه را به ۹۱ تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \overset{۷}{\equiv} ۷۳ \overset{۷}{\equiv} ۳ \\ a \overset{۱۳}{\equiv} ۱۴۲ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۳a \overset{۹۱}{\equiv} ۱۳\times ۳ \overset{۹۱}{\equiv} ۳۹ \\ ۷a \overset{۹۱}{\equiv} ۷\times -۱ \overset{۹۱}{\equiv} -۷ \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}} ۶a \overset{۹۱}{\equiv} ۴۶ \xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{بر ۲ تقسیم}} ۳a \overset{۹۱}{\equiv} ۲۳$$

$$\Rightarrow ۳a \overset{۹۱}{\equiv} ۲۳ + ۹۱ \overset{۹۱}{\equiv} ۱۱۴ \xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{بر ۳ تقسیم}} a \overset{۹۱}{\equiv} ۳۸$$

پس باقی‌مانده a بر عدد ۹۱ برابر ۳۸ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ معادله هم‌نهشتی)

۱۳- گزینه «۳» ـ می‌نویسیم:

$$۲^n \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷ \mid ۲^n - ۱ \Rightarrow ۲^۳ - ۱^۳ \mid ۲^n - ۱$$

در نتیجه $n \mid ۳$. پس کافی است تعداد عددهای دو رقمی مضرب ۳ را به‌دست آوریم:

$$۱۰ \le ۳k \le ۹۹$$

$$۴ \le k \le ۳۳$$

۳۰ مقدار برای k به‌دست می‌آید. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ مفهوم هم‌نهشتی و ترکیب آن با عاد کردن)

۱۴- گزینه «۴» ـ بنابر ویژگی عددهای بخش‌پذیر بر ۱۱ می‌نویسیم:

$$۶ - b + ۳ - a + ۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۰$$

$$a + b \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$$

یعنی $a + b = ۱۱k + ۱۰$ چون a و b رقم هستند. پس $a + b = ۱۰$. اکنون حالت‌های ممکن برای a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۹ \end{cases} \quad \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۸ \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} a = ۹ \\ b = ۱ \end{cases}$$

یعنی ۹ حالت برای زوج‌مرتب (a , b) به‌دست می‌آید. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس سوم ـ بخش‌پذیری)