

ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» - بنابر الگوریتم تقسیم و طبق فرض مسئله:

$$a = 62q + 7, a = 51q + 29$$

در نتیجه:

$$62q + 7 = 51q + 29 \Rightarrow 11q = 22 \Rightarrow q = 2$$

بنابراین:

$$a = 62 \times 2 + 7 = 131$$

یعنی مجموع ارقام a برابر ۵ است. (هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۲ - بخش پذیری) (آسان)

۲- گزینه «۲» - زمانی $a^2 = 6q + 3$ که $a = 6k + 3$ ، بنابراین:

$$1 \leq 6k + 3 \leq 100 \Rightarrow 0 \leq k \leq 16$$

یعنی ۱۷ عدد a به فرم $6k + 3$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۲ - بخش پذیری) (متوسط)

۳- گزینه «۲» - صورت تقسیم را به صورت $0 \leq r < b$ و $a = bq + r$ در نظر می‌گیریم. بنابر فرض مسئله:

$$a = 8r, r = b - 1$$

در نتیجه:

$$8(b-1) = bq + b - 1 \Rightarrow 7b - bq = 7 \Rightarrow b(7-q) = 7 \Rightarrow \begin{cases} b = 7 \\ q = 6 \end{cases} \Rightarrow r = 6$$

بنابراین:

$$a = 8r = 48$$

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۲ - بخش پذیری) (متوسط)

۴- گزینه «۱» - فرض کنید $P = 2$. در این صورت $P + 21 = 23$ که عددی اول است. چون تنها عدد اول زوج ۲ است، پس به ازای عدد اول $P \neq 2$ ،

عدد P فرد است و $P + 21$ عددی زوج است و بزرگ‌تر از ۲ است؛ یعنی نمی‌تواند عددی اول باشد، در نتیجه فقط به ازای $P = 2$ شرایط مسئله

برقرار است. (هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۲ - بخش پذیری، اعداد اول - افراز) (آسان)

۵- گزینه «۳» - بنابر فرض $145 \equiv 68 \pmod{m}$ ، یعنی $68 - 145 = -77$ یا $m \mid 77$ ، در نتیجه $(m = 7, 11, 77)$ ، چون:

$$16 \equiv 6 \pmod{7}, 160 \equiv 6 \pmod{11}, 160 \equiv 6 \pmod{77}$$

پس باقی‌مانده ۱۶۰ بر m برابر ۶ است. (هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۳ - تعریف و مفهوم هم‌نهشتی) (آسان)

۶- گزینه «۳» - اعضای کلاس هم‌نهشتی $22k + 17$ هستند.

$$22k + 17 < 999 \Rightarrow 22k \leq 982 \Rightarrow k \leq 44$$

پس بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی عضو کلاس هم‌نهشتی $22 \times 44 + 17 = 985$ برابر $22 \times 44 + 17 = 985$ است و مجموع ارقام برابر $9 + 8 + 5 = 22$ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۳ - هم‌نهشتی، کلاس هم‌نهشتی) (متوسط)

۷- گزینه «۴» - می‌توان نوشت:

$$7^2 \equiv 49 - 3 \times 17 \equiv -2 \pmod{17} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۷ می‌رسانیم.}} (7^2)^7 \equiv (-2)^7 \Rightarrow 7^{14} \equiv -128 \equiv -128 + 8 \times 17 \equiv 8$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را در ۷ ضرب می‌کنیم.}} 7^{15} \equiv 56 \equiv 56 - 3 \times 17 \equiv 5$$

اکنون به دست می‌آید:

$$7^{15} + a \equiv 0 \Rightarrow 5 + a \equiv 0 \Rightarrow a \equiv -5$$

یعنی a به صورت $17q - 5$ است و کوچک‌ترین عدد طبیعی a برابر $17 - 5 = 12$ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۳ - هم‌نهشتی، باقی‌مانده‌یابی) (دشوار)

۸- گزینه «۳» - چون $99 = 9 \times 11$ ، پس:

$$\overline{ab562} \equiv 0 \Rightarrow 1+a+b+5+6+2 \equiv 0 \Rightarrow a+b \equiv 4 \Rightarrow a+b = 9k+4 \quad (1)$$

و:

$$\overline{ab562} \equiv 0 \Rightarrow 2-6+5-b+a-1 \equiv 0 \Rightarrow a-b \equiv 0 \Rightarrow a-b = 11k' \quad (2)$$

از برابری (۱) و (۲) می توان به دست آورد $a = b = 2$: یعنی عدد مذکور 122562 است و در تقسیم بر 122 باقی مانده 74 می دهد. (هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۳ - الگوهای بخش پذیری) (دشوار)

۹- گزینه «۳» - فرض کنید هفدهم بهمن a امین روز سال و بیست و ششم فروردین b امین روز سال باشد. در این صورت:

$$\begin{cases} a = 6 \times 31 + 4 \times 30 + 17 \equiv (-1) \times 3 + 4 \times 2 + 3 \equiv 8 - 7 \equiv 1 \\ b = 26 \equiv 26 - 3 \times 7 \equiv 5 \end{cases}$$

پس a امین روز سال مانند اولین روز سال و b امین روز سال مانند پنجمین روز سال است. چون اولین روز سال یکشنبه است، پس پنجمین روز سال پنجشنبه است؛ یعنی 26 فروردین پنجشنبه است. (هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۲ - هم نهشتی، تقویم نگاری) (آسان)

۱۰- گزینه «۲» - فرض کنید $a = 11q$ ، $a \equiv 1$ و $a \equiv 1$ ، در این صورت:

$$\begin{cases} 11q \equiv 1 \xrightarrow{11 \equiv -1} -q \equiv 1 \Rightarrow -5q \equiv 5 \\ 11q \equiv 1 \xrightarrow{11q \equiv 1} q \equiv 1 \Rightarrow 4q \equiv 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{با هم جمع می کنیم.}} -q \equiv 9 \Rightarrow q \equiv -9 \Rightarrow q = 20k - 9$$

در نتیجه:

$$a = 11(20k - 9) = 220k - 99$$

باید تعداد اعداد سه رقمی به فرم $220k - 99$ را به دست آوریم:

$$100 \leq 220q - 99 \leq 999 \Rightarrow 1 \leq k \leq 4$$

در نتیجه 4 عدد به دست می آید. (سراسری ریاضی - ۹۴) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۳ - هم نهشتی) (دشوار)

۱۱- گزینه «۳» - شرط وجود جواب در این معادله آن است که:

$$(6, 9) | 2a + 5 \Rightarrow 3 | 2a + 5$$

به سادگی با بررسی گزینه ها، گزینه «۳» در این رابطه صدق می کند. (کتاب همراه علوی) (فصل اول - درس ۳ - معادله هم نهشتی، شرط جواب) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» - می توان نوشت:

$$22a \equiv 29 \xrightarrow[29 \equiv 2]{22 \equiv 4} 4a \equiv 2 \equiv 2 + 2 \times 9 \equiv 20 \xrightarrow{(4, 9)=1} a \equiv 5 \Rightarrow a = 9k + 5$$

اکنون کوچک ترین عدد سه رقمی به صورت $9k + 5$ را به دست می آوریم:

$$9k + 5 \geq 100 \Rightarrow k \geq 11$$

در نتیجه کوچک ترین عدد سه رقمی به صورت $9k + 5 = 104 = 9 \times 11 + 5$ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۳ - معادله هم نهشتی) (آسان)

۱۳- گزینه «۴» - می توان نوشت:

$$9x + 13y = 725 \Rightarrow 13y \equiv 725 \xrightarrow[725 \equiv 5]{13 \equiv 4} 4y \equiv 5 \equiv 5 - 9 \equiv -4 \xrightarrow{(4, 9)=1} y \equiv -1 \Rightarrow y = 9k - 1$$

با قرار دادن این مقدار در معادله $9x + 13y = 725$ به دست می آید:

$$9x = 728 - 13 \times 9k \Rightarrow x = 82 - 13k$$

چون x و y عدد طبیعی هستند، پس:

$$\begin{cases} x = 82 - 13k > 0 \\ y = 9k - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 6 \\ k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

در نتیجه 6 مقدار قابل قبول برای k به دست می آید؛ یعنی تعداد جواب های معادله برابر 6 است.

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۸) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۲ - معادله سیاله) (متوسط)