

ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» - در تقسیم رابطه $a = bq + r$ برقرار است که a را مقسوم و b را مقسوم‌علیه و q را خارج قسمت و r را باقی مانده گوئیم.

$$q = \left[\frac{a}{b} \right] = \left[-\frac{203}{16} \right] = -13$$

$$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq \Rightarrow r = -203 - 16(-13) = 5$$

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل اول - تقسیم - صفحه ۱۴) (آسان)

۲- گزینه «۴» -

$$a = bq + r \quad 0 \leq r < b$$

$$a = 23q + q^2 - 4 \quad 0 \leq q^2 - 4 < 23 \Rightarrow 4 \leq q^2 < 27 \Rightarrow q \in \{2, 3, 4, 5\}$$

$$a_{\max} = 23(5) + (5)^2 - 4 = 115 + 25 - 4 \Rightarrow a_{\max} = 136$$

$$a \text{ مجموع ارقام } = 1 + 3 + 6 = 10$$

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل اول - قضیه تقسیم - صفحه ۱۴) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -

$$\text{اگر } n = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3n + 1 = 7 \text{ اول} \\ 5n - 3 = 7 \text{ اول} \end{cases}$$

$$\text{اگر } n = 3 \Rightarrow \{3n + 1 = 10 \text{ غیر اول}\}$$

اگر n اول و $n > 3$ باشد حتماً $n = 6k \pm 1$ است.

$$3n + 1 = \begin{cases} \text{غیر اول } 2k' = 2(9k + 2) = 18k + 4 = 2(9k + 2) \\ \text{غیر اول } 2k' = 2(9k - 1) = 18k - 2 = 2(9k - 1) \end{cases}$$

پس تنها به ازای $n = 2$ هر دو عدد $3n + 1$ و $5n - 3$ اول هستند. (فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل اول - افراز مجموعه به کمک تقسیم) (متوسط)

۴- گزینه «۱» - اگر باقی مانده تقسیم دو عدد ۱۱۷ و ۵۲ بر m برابر باشند پس:

$$117 \equiv 52 \pmod{m} \Rightarrow m \mid 117 - 52 \Rightarrow m \mid 65 \xrightarrow{10 < m < 20} m = 13$$

$$391 \equiv 1 \pmod{13}$$

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل اول - همبستگی) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -

$$a \equiv 3 \pmod{8} \Rightarrow a = 8k + 3$$

$$10 \leq a < 100 \Rightarrow 10 \leq 8k + 3 < 100 \Rightarrow 7 \leq 8k < 97 \Rightarrow \frac{7}{8} \leq k < \frac{97}{8}$$

$$k \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}$$

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل اول - همبستگی) (آسان)

۶- گزینه «۴» - اگر $a \equiv b \pmod{n}$ و $a \equiv b \pmod{m}$ آنگاه $a \equiv b \pmod{[m,n]}$

$$\left. \begin{aligned} a \equiv 4 \pmod{11} &\Rightarrow a \equiv 4 \pmod{11} \\ a \equiv 6 \pmod{7} &\Rightarrow a \equiv 4 \pmod{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \equiv 4 \pmod{[11,7]} \Rightarrow a \equiv 4 \pmod{77} \Rightarrow 2a + 3 \equiv 99 \equiv 22 \pmod{77}$$

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل اول - همبستگی) (دشوار)

۷- گزینه «۳» -

$$7^2 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow (7^2)^2 \equiv 16 \pmod{15} \Rightarrow 7^4 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (7^4)^{51} \equiv 1^{51} \pmod{15} \Rightarrow 7^{204} \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 7^{205} \equiv 7 \pmod{15}$$

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل اول - همبستگی) (متوسط)

$$7a - 4 \equiv 7a + 3 \Rightarrow a \equiv 7 \Rightarrow \begin{cases} a^3 \equiv 3 \Rightarrow 7a^3 \equiv 6 \\ \Delta a \equiv 5 \end{cases}$$

$$7a^3 + \Delta a + 3 \equiv 6 + 5 + 3 \equiv 4$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل اول - همپشتی) (دشوار)

۹- گزینه «۱» -

$$7a^2 + b^2 \equiv 0 \Rightarrow 7 - b + 6 - a + 3 \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv a + b \Rightarrow \begin{cases} a + b = 11 \\ a + b = 0 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$7a^2 + b^2 \equiv 7 + a + 6 + b + 3 \equiv 11 + \underbrace{a + b}_{11} \equiv 22 \equiv 4$$

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل اول - همپشتی) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» -

$$7x - 13 \equiv 0 \Rightarrow 7x \equiv 13 \Rightarrow 7x \equiv 6 \xrightarrow{(7, 13)=1} x \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2$$

$$x \geq 100 \Rightarrow 7k + 2 \geq 100 \Rightarrow 7k \geq 98 \Rightarrow k \geq \frac{98}{7} \Rightarrow k \in \{14, 15, \dots\}$$

$$k = 14 \Rightarrow a_{\min} = 7(14) + 2 = 100$$

مجموع ارقام = ۱

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل اول - همپشتی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» -

$$7x + 5y = 49$$

$$5y \equiv 49 \Rightarrow 2y \equiv 1 \Rightarrow 2y \equiv 4 \xrightarrow{(2, 5)=1} y \equiv 2 \Rightarrow y = 5k + 2$$

$$7x + 5(5k + 2) = 49 \Rightarrow 7x = -25k + 49 \Rightarrow x = -5k + 7$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow -5k + 7 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{7}{5} \\ y \geq 0 \Rightarrow 5k + 2 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2\}$$

به ۳ طریق امکان پذیر است. (کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل اول - معادله سیاله) (متوسط)