

ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۴» - نکته: در تقسیم عدد a بر b خارج قسمت برابر q است که:

$$q = \left[\frac{a}{b} \right]$$

$$q = \left[\frac{22! + 74}{23} \right] = \left[\frac{22!}{23} + \frac{74}{23} \right] = [22! + 3/21] = 22! + [3/21] = 22! + 3$$

(فرهمنیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - قضیه تقسیم) (متوسط)

۲- گزینه «۳» - اگر a مقسوم و b مقسوم‌علیه و q و خارج قسمت r باقی‌مانده باشد:

$$a = bq + r$$

$$a = bq + r \Rightarrow a + 153 = b(q + 2) + r - 5 \Rightarrow$$

$$bq + r + 153 = bq + 2b + r - 5 \Rightarrow 158 = 2b \Rightarrow b = 79$$

(فرهمنیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - قضیه تقسیم) (آسان)

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ و } a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{mn}$$

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv 15 \Rightarrow a \equiv -9 \\ a + 9 &\equiv 0 \Rightarrow a \equiv -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \equiv \begin{bmatrix} 30, 24 \end{bmatrix} \Rightarrow a \equiv -9 \Rightarrow a \equiv 12 \pmod{24}$$

اگر $k = 1$ باشد، کمترین مقدار a به دست می‌آید که برابر ۱۱۱ است و مجموع ارقام آن ۳ است.

(فرهمنیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - هم‌نهشتی) (متوسط)

۴- گزینه «۳» - عددی بر ۹۹ بخش‌پذیر است که هم بر ۹ و هم ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

$$\begin{aligned} \overline{9} \quad \overline{9} \quad \overline{9} \\ 2a5fb3 \equiv 0 \Rightarrow 2 + a + 5 + 4 + b + 3 \equiv 0 \Rightarrow 14 + a + b \equiv 0 \Rightarrow a + b \equiv -14 \\ \Rightarrow a + b \equiv 4 \Rightarrow a + b = 4 \text{ یا } a + b = 13 \end{aligned}$$

$$\overline{11} \quad \overline{11} \quad \overline{11} \\ 2a5fb3 \equiv 0 \Rightarrow 2 - b + 4 - 5 + a - 2 \equiv 0 \Rightarrow a - b \equiv 0 \Rightarrow a = b$$

بنابراین تنها جواب مسئله $a = b = 2$

$$\overline{7} \\ 225423 \equiv 2$$

(فرهمنیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - بخش‌پذیری) (متوسط)

$$(a+b)^{ab} \equiv a^b + b^a \pmod{ab} \text{ - نکته: } ۲-۱$$

$$۲۰۴۲ \equiv ۹۴۲ + ۱۱۴۲$$

$$\begin{aligned} ۲۰۴ \equiv ۴ \Rightarrow (۲۰۴)^{۹۹} \equiv ۴^{۹۹} \Rightarrow ۲۰۲ \equiv ۳۴ \Rightarrow (۲۰۲)^{۹۹} \equiv ۳۴^۲ \\ \Rightarrow ۲۰۴ \equiv ۱۱۵۶ \Rightarrow \left. \begin{aligned} ۲۰۴ \equiv ۶۷ \\ ۲۰۲ \equiv ۴ \end{aligned} \right\} \times \rightarrow ۲۰۴۲ \equiv ۲۶۸ \Rightarrow ۲۰۴۲ \equiv ۷۰ \end{aligned}$$

(فرهمنیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - هم‌نهشتی) (متوسط)

۶- گزینه «۱» -

$$\overline{10} \quad \overline{10} \quad \overline{5} \\ 5x + 3 \equiv 3x + 9 \Rightarrow 2x \equiv 6 \Rightarrow x \equiv 3$$

$$\left. \begin{aligned} x \equiv 3 \Rightarrow x^2 \equiv 9 \Rightarrow 3x^2 \equiv 27 \Rightarrow 3x^2 \equiv 2 \\ x \equiv 3 \Rightarrow 7x \equiv 21 \Rightarrow 7x \equiv 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3x^2 + 7x \equiv 3 \Rightarrow 3x^2 + 7x - 1 \equiv 2$$

(فرهمنیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - معادله هم‌نهشتی) (متوسط)

۷- گزینه «۱» - نکته: شرط آنکه معادله $ax + by = c$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب

باشد، آن است که $c | (a, b)$.

$$(5a - 3, 3a + 2) = d$$

$$\left. \begin{aligned} d | 5a - 3 \Rightarrow d | -15a + 9 \\ d | 3a + 2 \Rightarrow d | 15a + 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d | 19$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 1 \Rightarrow 117 \text{ جواب است} \\ d = 19 \Rightarrow 19/17 \text{ نیست} \end{cases}$$

بنابراین اگر $d = 19$ باشد، معادله جواب ندارد.

$$\left. \begin{aligned} 19 | 5a - 3 \Rightarrow 19 | -5a + 3 \\ 19 | 3a + 2 \Rightarrow 19 | 6a + 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 19 | a + 7 \Rightarrow a + 7 = 19k \Rightarrow a = 19k - 7$$

$$10 \leq a < 100 \Rightarrow 10 \leq 19k - 7 < 100 \Rightarrow 17 \leq 19k < 107 \Rightarrow \frac{17}{19} \leq k < \frac{107}{19}$$

$$\Rightarrow k \in \{1, 2, \dots, 5\}$$

مسئله در ۵ حالت جواب ندارد پس به ازای $90 - 5 = 85$ حالت دارای جواب است.

(فرهمنیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - معادله سیاله) (دشوار)

۸- گزینه «۴» - اگر تعداد کالاهای خریداری شده به قیمت ۱۳۰ تومان x و تعداد کالاهای

خریداری شده به قیمت ۱۶۰ تومان باشد. داریم:

$$130x + 160y = 20500 \Rightarrow 13x + 16y = 2050$$

$$\overline{13} \quad \overline{13} \quad \overline{13} \\ 16y \equiv 2050 \Rightarrow 3y \equiv 9 \xrightarrow{+3} y \equiv 3 \Rightarrow y = 13k + 3$$

$$\left. \begin{aligned} x > 0 \Rightarrow -16k + 154 > 0 \Rightarrow k < 9/625 \\ y > 0 \Rightarrow 13k + 3 > 0 \Rightarrow k < \frac{-3}{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$$

بنابراین به ۱۰ روش می‌توان از این ده کالا خریداری کرد.

(فرهمنیور) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس سوم - معادله سیاله) (متوسط)