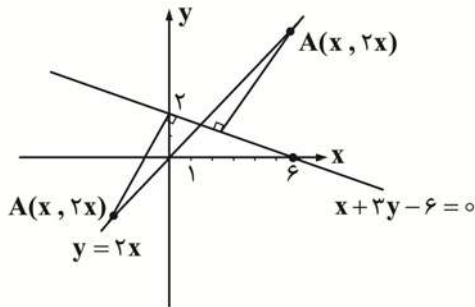


حسابان ۱

۱- گزینه «۳» - تنها نقاط واقع روی نیمسازهای ربع اول و سوم و ربع دوم و چهارم هستند که از محورهای مختصات به یک فاصله قرار دارند. بنابراین نقطه A روی نیمساز ربع دوم واقع است. در نیمساز ربع دوم، داریم:

$$\begin{cases} x = -y \Rightarrow -2m = -3m + 1 \Rightarrow m = 1 \\ x < 0, y > 0 \end{cases}$$



(کتاب همراه علوی) (فصل اول - درس پنجم) (آسان)

۲- گزینه «۱» - فاصله نقطه $A(x, 2x)$ از خط $x + 3y - 6 = 0$ برابر است با:

$$3 = \frac{|x + 6x - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \Rightarrow 3\sqrt{10} = |7x - 6|$$

$$\Rightarrow 7x - 6 = \pm 3\sqrt{10} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 3\sqrt{10}}{7}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع طول نقاط} = \frac{6 + 3\sqrt{10}}{7} + \frac{6 - 3\sqrt{10}}{7} = \frac{12}{7}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - درس پنجم - فاصله نقطه از خط) (دشوار)

۳- گزینه «۱» - نقطه وسط پاره خط CD برابر است با:

$$\left(\frac{-m+7}{2}, \frac{2m+2}{2} \right)$$

حال این نقطه را در معادله داده شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{2m+2}{2} = 2\left(\frac{-m+7}{2}\right) + 2 \Rightarrow m = 4$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول - درس پنجم - نقطه وسط یک پاره خط) (متوسط)

۴- گزینه «۴» -

$$\left. \begin{array}{l} D_f = (1, 3] \\ R_f = (2, 4] \\ f(x) = x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f : (1, 3] \Rightarrow (2, 4] \\ f(x) = x + 1 \end{array} \right\} \text{ یا } \left\{ \begin{array}{l} f : (1, 3] \Rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x + 1 \end{array} \right\} \text{ هم دامنه}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس اول - نمایش تابع) (آسان)

۵- گزینه «۴» -

گزینه «۱»: $f(1) \neq g(1)$

گزینه «۲»: $D_f \neq D_g$

گزینه «۳»: $D_f \neq D_g$

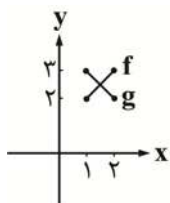
گزینه «۴»: $D_f = D_g = \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ زوج} \Rightarrow \cos(180^\circ x) = 1 = (-1)^x \\ x \text{ فرد} \Rightarrow \cos(180^\circ x) = -1 = (-1)^x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس اول - برابری دو تابع) (متوسط)

۶- گزینه «۴» -

گزینه «۱»: تنها دو تابع خطی با چنین شرایطی وجود دارد.



گزینه «۲»: همواره بُرد تابع، زیر مجموعه‌ای از هم دامنه آن است.

گزینه «۳»: تعداد توابعی که از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی می‌توان نوشت، برابر n^m است.

$$f: \underbrace{\{a, b, c\}}_{\substack{\text{عضوی } 3=m}} \rightarrow \underbrace{\{d, e\}}_{\substack{\text{عضوی } 2=n}} \Rightarrow f \text{ تعداد توابع } f = n^m = 2^3 = 8$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس اول - ترکیبی) (متوسط)

۷- گزینه «۲» -

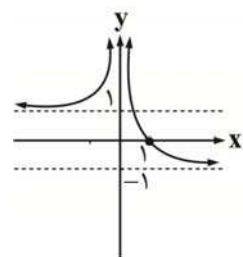
$$\frac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_1 = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\frac{x+1}{x-\frac{1}{x}} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_2 = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس دوم - توابع گویا) (آسان)

۸- گزینه «۳» -



$$f(x) = \frac{1-x}{|x|} : \begin{cases} x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \\ x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \end{cases}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس دوم - توابع گویا) (متوسط)

۹- گزینه «۱» -

$$\sqrt{x} \Rightarrow D_1 : x \geq 0$$

$$\sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow D_2 = 1-\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 = [0, 1)$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس دوم - توابع رادیکالی) (آسان)

۱۰- گزینه «۲» -

$$\left. \begin{aligned} 2-x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2] \\ \sqrt{2-x} \geq 0 &\Rightarrow -\sqrt{2-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{2-x}}{f(x)} \leq 1 \Rightarrow R_f = (-\infty, 1] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{دامنه و برد تابع گزینه «۲» این چنین است.}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس دوم - توابع رادیکالی) (آسان)

۱۱- گزینه «۱» - در نمایش یک تابع، به‌ازای هر x باید دقیقاً یک y پیدا شود.

این معادله فقط شامل زوج مرتب $(0, 0)$ است و یک تابع یک عضوی را نشان می‌دهد. $\Rightarrow x=0, y=0$: گزینه «۱»

* گزینه «۲»: $x=0 \Rightarrow y=\pm 1$

* گزینه «۳»: $x=0 \Rightarrow y=0, -2$

* گزینه «۴»: $x=0: |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس دوم - معادلات و توابع) (آسان)

۱۲- گزینه «۳» -

$$[x] + 3 = x + 5 \Rightarrow [x] - x = -2 \Rightarrow x - [x] = 2$$

اما می‌دانیم که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، داریم: $0 \leq x - [x] < 1$ بنابراین سمت چپ معادله فوق عددی کمتر از یک است در حالی که سمت راست آن عددی بزرگتر از یک است. پس معادله جواب ندارد. (گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس دوم - تابع جزء صحیح) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» -

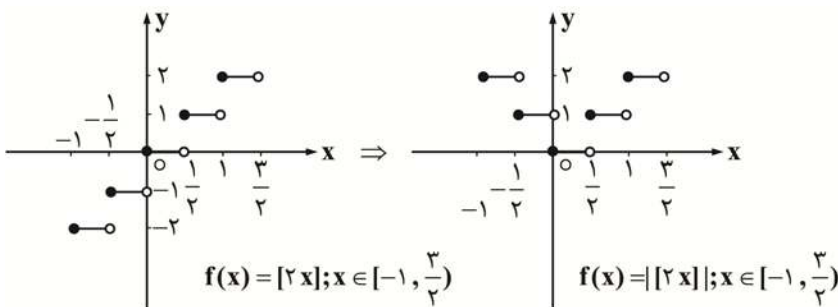
$$\sqrt{1-x} \Rightarrow D_1: 1-x \geq 0 \Rightarrow [x] \leq 1 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow D_1 = (-\infty, 2)$$

$$\frac{\sqrt{1-x}}{[x]} \Rightarrow D_2: [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_2 = \mathbb{R} - [0, 1)$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 = (-\infty, 2) \cap \{\mathbb{R} - [0, 1)\} = (-\infty, 0) \cup [1, 2)$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس دوم - ترکیبی) (متوسط)

۱۴- گزینه «۳» -



(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس دوم - تابع جزء صحیح) (متوسط)

۱۵- گزینه «۳» - (گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس سوم - توابع یک به یک) (آسان)

۱۶- گزینه «۴» - نمایش زوج مرتب یک تابع، زمانی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتبی، مؤلفه دوم یکسان نداشته باشند.

$$f \text{ تابع است} \Rightarrow (3, 2), (3, a^2 - a)$$

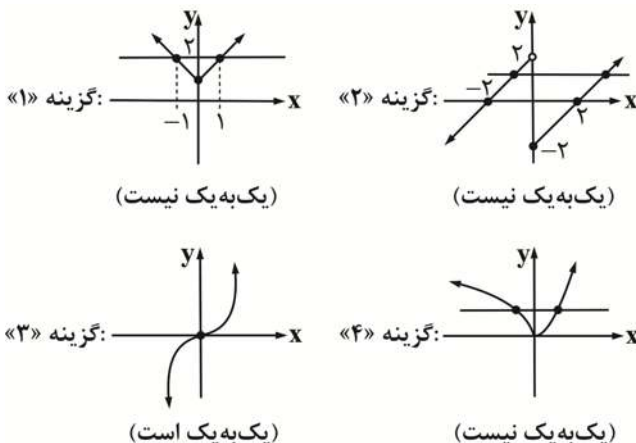
$$\Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = \{(3, 2), (2, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$$

$$f \text{ یک به یک است} \Rightarrow (3, 2), (b, 2) \Rightarrow b = 3 \Rightarrow (a, b) = (2, 3)$$

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۶) (فصل دوم - درس سوم - تابع یک به یک) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» -



(کتاب همراه علوی) (فصل دوم - درس سوم - تابع یک به یک) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» - باید ببینیم اگر جای x و y را عوض کنیم، کدام نقطه روی تابع قرار می‌گیرد.

$$\text{گزینه «۱» : } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) \in f^{-1} \Rightarrow \left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in f$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \times$$

$$\text{گزینه «۲» : } (1, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, 1) \in f$$

$$\Rightarrow 1 \stackrel{?}{=} \frac{0}{\sqrt{1+0^2}} \Rightarrow 1 = 0 \quad \times$$

$$\text{گزینه «۳» : } (0, 1) \in f^{-1} \Rightarrow (1, 0) \in f$$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \Rightarrow 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \times$$

$$\text{گزینه «۴» : } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right) \in f^{-1} \Rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in f$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

(کتاب همراه علوی) (فصل دوم - درس سوم - وارون یک تابع) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» -

$$f(x) = \frac{4x+5}{3x-4} = y \Rightarrow 4x+5 = 3xy - 4y \Rightarrow 4x - 3xy = -5 - 4y \Rightarrow x(4 - 3y) = -5 - 4y$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 - 4y}{4 - 3y} = \frac{4y + 5}{3y - 4}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض}} y = \frac{4x+5}{3x-4} = f^{-1}(x)$$

چون $f(x) = f^{-1}(x)$ است، پس f و f^{-1} در بی‌شمار نقطه متقاطع‌اند. (کتاب همراه علوی) (فصل دوم - درس سوم - وارون یک تابع) (متوسط)

۲۰- گزینه «۱» -

$$f(x) = ax^r + b \quad (1)$$

$$f(1) = 0 \xrightarrow{(1)} a + b = 0 \quad (2)$$

$$(1, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, 1) \in f \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow b = 1 \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -x^r + 1$$

$$f^{-1}(9) = y \Rightarrow f(y) = 9 \Rightarrow -y^r + 1 = 9 \Rightarrow -y^r = 8 \Rightarrow y = -2$$

(کتاب همراه علوی) (فصل دوم - درس سوم - وارون یک تابع) (دشوار)