

ریاضی ۱

۱- گزینه «۴» - نقاط (۳, ۶) و (۰, -۳) روی سهمی قرار دارند، بنابراین:

$$x=0 \Rightarrow 0+0+c=-3 \Rightarrow c=-3$$

$$x=3 \Rightarrow 9a+3b-3=6 \xrightarrow{-3} 9a+3b-6=9$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم - معادله درجه دوم و معادله سهمی)

۲- گزینه «۴» - برای آن که یک عبارت گویا همواره تعریف شده باشد، مخرج آن عبارت باید همواره مخالف صفر باشد، عبارت $x^2 + 4$ به ازای هیچ مقدار x برابر صفر نمی‌شود، بنابراین عبارت $x^2 - mx + 1$ باید مخالف صفر باشد یعنی:

$$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0 \Rightarrow m^2 < 4 \Rightarrow m < 2 \text{ یا } m > -2 \Rightarrow |m| < 2$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم - تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم)

۳- گزینه «۲» - اگر فرض کنیم $c = -5$ ، آن‌گاه $p(x) = \frac{x-3}{ax^2+bx-5}$ و ۵ و ۱ ریشه‌های مخرج هستند.

$$(1, 0) \Rightarrow a+b-5=0, (5, 0) \Rightarrow 25a+5b-5=0$$

$$a=5-b \Rightarrow 25(5-b)+5b-5=0 \Rightarrow 125-20b-5=0 \Rightarrow b=6 \Rightarrow a=5-6=-1$$

آن‌گاه جدول تعیین علامت آن مطابق زیر است:

	۱	۳	۵
$p(x)$	+	-	+
	تعریف نشده	تعریف نشده	

حال اگر $c = 5$ آن‌گاه $p(x) = \frac{x-3}{ax^2+bx+c}$ و ۵ و ۱ ریشه‌های مخرج هستند.

$$(1, 0) \Rightarrow a+b+5=0, (5, 0) \Rightarrow 25a+5b+5=0$$

$$b=-5-a \Rightarrow 25a+5(-5-a)+5=0 \Rightarrow 25a-25-5a+5=0 \Rightarrow 20a=20 \Rightarrow a=1, b=-6$$

	۱	۳	۵
$p(x)$	-	+	-
	تعریف نشده	تعریف نشده	

بنابراین $a+c=6$ (الله‌دادی) (فصل چهارم - تعیین علامت چند جمله‌ای درجه اول و درجه دوم)

۴- گزینه «۱» - در عبارت «ب» چون تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد طبیعی (به جز یک) بیش از یک عدد است، بنابراین این رابطه تابع نیست. در عبارت «ج» ممکن است تعداد دوستان یک دانش‌آموز از یک بیشتر باشد، بنابراین این رابطه نیز تابع نیست. (الله‌دادی) (فصل پنجم - مفهوم تابع)

۵- گزینه «۱» - اگر عدد فرد اول برابر n باشد دو عدد بعدی عبارتند از $(n+2)$ و $(n+4)$ ، بنابراین:

$$n^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2 = n^2 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 8n + 16 = 3n^2 + 12n + 20 = 83 \Rightarrow 3n^2 + 12n - 63 = 0 \Rightarrow$$

$$n = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 756}}{6} = \begin{cases} \text{ق ق } 3 \\ \text{غ ق ق } -7 \end{cases}$$

سه عدد عبارتند از ۷ و ۵ و ۳ بنابراین $3+7=10$. (الله‌دادی) (فصل چهارم - معادله درجه دوم و روش‌های حل آن)

۶- گزینه «۴» - چون نمودار هیچ نقطه تلاقی با محور x ندارد پس یعنی ریشه ندارد و $\Delta < 0$ و چون دهانه سهمی رو به پایین بوده و بالاترین نقطه سهمی راس آن است. بنابراین $a < 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \times (-4)a < 0 \Rightarrow b^2 + 16a < 0 \Rightarrow b^2 < -16a \Rightarrow -4\sqrt{-a} < b < 4\sqrt{-a}$$

چون رأس سهمی دارای مولفه $x > 0$ است، در قسمت مثبت محور x ها قرار دارد. بنابراین:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0 \Rightarrow 0 < b < 4\sqrt{-a}$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم - تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم و تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم)

۷- گزینه «۲» - برای آن که یک مجموعه تابع باشد نباید دارای هیچ دو زوج مرتبی باشد که مولفه اول برابر و مولفه دوم نابرابر دارند، بنابراین:

$$m^2 - 6m + 1 = -m^2 + 2m - 5 \Rightarrow 2m^2 - 8m + 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

اگر $m = 1$ باشد، آن‌گاه زوج مرتب (۲, ۵) به وجود می‌آید اما چون یک زوج مرتب به صورت (۲, -۴) موجود است، بنابراین با تعریف تابع در تناقض است. بنابراین $m = 3$:

$$\{(2, -8), (4, 5), (n, -8), (2, -8)\}$$

بنابراین $n = 2$ و $m + n = 5$ (الله‌دادی) (فصل پنجم - نمایش تابع با زوج مرتب)

$$-2 < \frac{2x-8}{3} < 4 \xrightarrow{\times 3} -6 < 2x-8 < 12 \xrightarrow{+8} 2 < 2x < 20 \xrightarrow{+2} 1 < x < 10$$

$$|x-\alpha| < \beta \Rightarrow -\beta < x-\alpha < \beta \xrightarrow{+\alpha} \alpha-\beta < x < \alpha+\beta$$

$$\alpha-\beta=1, \alpha+\beta=10 \Rightarrow \alpha=\beta+1 \Rightarrow \beta+1+\beta=10 \Rightarrow 2\beta=9 \Rightarrow \beta=\frac{9}{2}$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم - نامعادله و نامعادله قدرمطلق)

۱۵- گزینه «۳» - می‌دانیم جدول تعیین علامت درجه دوم $p = 2x^2 - mx - 3$ به صورت زیر است:

x	x_1	x_2
$p(x)$	+	-

پس از آن‌جا که $x_1 < -1 < x_2$ است، لذا به‌ازای $x = -1$ عبارت منفی خواهد بود، داریم:

$$p(-1) < 0 \Rightarrow 2(-1)^2 - m(-1) - 3 < 0 \Rightarrow 2 + m - 3 < 0 \Rightarrow m < -2$$

یعنی اگر $m < -2$ آن‌گاه حتماً $x_1 < -1 < x_2$ خواهد بود. (الله‌دادی) (فصل چهارم - تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم)

$$fa + 2b > 27, 3a - 2b = 8 \Rightarrow 2b = 3a - 8$$

۱۶- گزینه «۳» -

$$fa + 3a - 8 > 27 \Rightarrow 7a > 35 \Rightarrow a > 5, 3a > 15 \Rightarrow 3a - 8 > 7 \Rightarrow 2b > 7 \Rightarrow b > 3.5, a > 5$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم - تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم)

۱۷- گزینه «۴» - نامعادله $|x-4| < 2x-5$ را برای $x \geq 0$ و $x < 0$ جداگانه حل می‌کنیم:

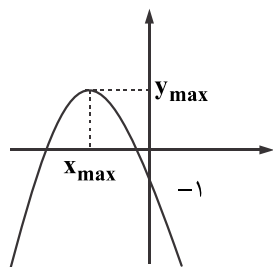
$$x \geq 0 \Rightarrow (x-4)x < 2x-5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow 1 < x < 5$$

$$x < 0 \Rightarrow (x-4)(-x) < 2x-5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0 \Rightarrow x < 1 - \sqrt{6}, x > 1 + \sqrt{6} \xrightarrow{x < 0} x < 1 - \sqrt{6}$$

جواب معادله به‌صورت $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$ است. (الله‌دادی) (فصل چهارم - نامعادله و تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم)

۱۸- گزینه «۱» - با توجه به $f(0) = -1$ نمودار تابع باید به‌صورت زیر باشد، تا محور x ها را در دو نقطه به طول منفی قطع کند. یعنی اولاً سهمی رو به

پایین و ثانیاً رأس سهمی دارای طول منفی و عرض مثبت است. پس داریم:



$$\begin{cases} a < 0 \\ x_{\max} = \frac{-(a+2)}{2a} < 0 \Rightarrow a+2 < 0 \Rightarrow a < -2 \\ y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{(a+2)^2 + 4a}{4a} > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0 \Rightarrow a < -9 \text{ یا } a > -1 \end{cases}$$

از اشتراک نواحی بالا نتیجه می‌گیریم $a < -9$ (سراسری خارج از کشور ریاضی ۹۱) (فصل چهارم - رأس سهمی)

۱۹- گزینه «۱» - برای این‌که معادله فاقد ریشه باشد باید داشته باشیم $\Delta < 0$

$$\Delta = (m+1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}m+2\right) < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 < 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$

(سراسری تجربی ۸۹) (فصل چهارم - تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم)

۲۰- گزینه «۴» -

$$\frac{x(x-3)}{x^2-7x+6} > 0 \Rightarrow x=0, x-3=0 \Rightarrow x=3, x^2-7x+6=0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

x	0	1	3	6
$x-3$	-	+	-	+
x^2-7x+6	+	+	-	+
$p(x)$	+	-	+	-

تعریف نشده تعریف نشده

$\Rightarrow \{x: x < 0 \text{ یا } 1 < x < 3 \text{ یا } x > 6\}$

(سراسری خارج از کشور ریاضی - با تغییر) (فصل چهارم - نامعادله و تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم)