ریاضیات

۱- گزینه «۱» ـ بررسی موارد:

الف) شیب در نقاط A و B منفی است و $|m_B| > |m_A|$، پس $m_B < m_A$.

ب) شیب در نقطه A منفی و در نقطه C مثبت است و $|m_A| < |m_C|$. بنابراین $m_A + m_C > 0$.

پ) شیب در نقطه D مثبت و در نقطه B منفی است، پس $m_D > m_B$.

ت) با توجه به اینکه $|m_B| < |m_D|$، پس $|m_B| - |m_D| < 0$. بنابراین فقط مورد (ت) صحیح است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ آشنایی با مفهوم مشتق)

۲- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-f(2))(f^2(x)+f^2(2)+f(2)f(x))}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}(f^2(x)+f^2(2)+f(2)f(x)) = f'(2)\times 3f^2(2) = 4\times 12 = 48$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ آشنایی با مفهوم مشتق)

۳- گزینه «۴» ـ $f'(2)$ برابر است با شیب خط مماس بر نمودار در نقطه $x = 2$. و همچنین برابر است با شیب خط گذرا از دو نقطه $(6, 5)$, $(2, 2)$:

$$f'(2) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ آشنایی با مفهوم مشتق)

۴- گزینه «۴» ـ

$$y' = 3f'(x)g(x) + g'(x)(1+3f(x)) \xrightarrow{x=1} y'(1) = 3f'(1)g(1) + g'(1)(1+3f(1)) = 3\times 3\times 2 + (-4)(4) = 18-16 = 2$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ محاسبه مشتق توابع)

۵- گزینه «۲» ـ طبق قضایای کتاب درسی توابع $kf\ (k\in\mathbb{R})$، $f+g$، fg در $x = a$ مشتق‌پذیرند و تابع $\frac{f}{g}$ با شرط $g(a)\neq 0$ در $x = a$ مشتق‌پذیر است و بدون قید این شرط نمی‌توان گفت که $\frac{f}{g}$ در $x = a$ مشتق‌پذیر است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ محاسبه مشتق توابع)

۶- گزینه «۳» ـ هریک از ضابطه‌های تابع f روی بازه داده شده، مشتق‌پذیر است. پس فقط کافی است مشتق‌پذیری و پیوستگی را روی نقاط ۱ و ۴ بررسی کنیم:

$$(\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 5\ ,\ \lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = -40) \Rightarrow \text{ } f \text{ در ۱ و ۴ پیوسته است.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -6 & x<1 \\ -6x & 1\le x<4 \\ \frac{-5}{\sqrt{x}} & x>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(1) = -6\ ,\ f'_+(1) = -6 \Rightarrow f \text{ در } x=1 \text{ مشتق پذیر است.} \\ f'_-(4) = -24\ ,\ f'_+(4) = \frac{-5}{2} \Rightarrow f \text{ در } x=4 \text{ مشتق پذیر نیست.} \end{cases} \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R}-\{4\}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری)

۷- گزینه «۱» ـ

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1+a\ ,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = b \xrightarrow{f \text{ در } x=1 \text{ پیوسته است}} 1+a = b \quad (*)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x\ge 1 \\ b & x<1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = 2\ ,\ f'_-(1) = b \xrightarrow{\text{مشتق چپ و راست برابرند}} b = 2 \xrightarrow{(*)} a = 1 \Rightarrow a+b = 3$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری و پیوستگی)

۸- گزینه «۱» ـ تابع «الف» در نقطه x_0 دارای مماس قائم است، پس x_0 نقطه گوشه‌ای نیست. همچنین توابع «ب» و «پ» در x_0 پیوسته نیستند. پس x_0 نمی‌تواند نقطه گوشه‌ای باشد. اما در تابع «ت»، x_0 نقطه گوشه‌ای است. چون مشتق چپ و راستش متناهی و نابرابرند.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ نقطه گوشه‌ای)

۹- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

چون حد چپ و راست تابع در $x = 1$ برابر نیست، پس تابع در این نقطه پیوسته نیست.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری و پیوستگی)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x<1\\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x<0 \text{ یا } x>1\end{cases}$$

$f'_+(0)=f'_-(0)=+\infty \Rightarrow x=0$ مماس قائم است.

$f'_+(1)=\frac{1}{3}, f'_-(1)=\frac{1}{2} \Rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1) \Rightarrow x=1$ نقطه گوشه ای است.

(توجه کنید که تابع در $x=0$ و $x=1$ پیوسته است) (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مماس قائم ـ نقطه گوشه‌ای)

۱۱- گزینه «۲» ـ با توجه به اینکه به‌ازای $x<-1$، شیب مماس بر نمودار f منفی است، پس نمودار f' در این بازه باید زیر محور xها باشد. در بازه $-1<x<1$، شیب نمودار f ثابت و مثبت است. پس نمودار f' در این بازه باید یک خط افقی و بالای محور xها باشد که نشان‌دهنده یک عدد ثابت مثبت است. به‌ازای $x>1$، شیب مماس بر نمودار f منفی است، پس در این بازه نمودار f' باید زیر محور xها باشد. ضمناً f در نقاط -1 و 1 مشتق ندارند. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ نمودار تابع f')

۱۲- گزینه «۴» ـ نمودار f' داده شده، به‌ازای $x>0$، یک عدد ثابت مثبت است، پس نمودار f در این بازه باید یک خط با شیب مثبت باشد، که تمام نمودارها این ویژگی را دارند. همچنین نمودار f' به‌ازای $x<0$، روی محور xها است. یعنی مقدار آن صفر است. از اینجا نتیجه می‌شود، f به‌ازای $x<0$ برابر با یک عدد ثابت است. حال این عدد می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. پس می‌تواند یک خط افقی بالای محور xها، زیر محور xها یا روی محور xها باشد. در مورد نقطه $x=0$ هم اطلاعی در دست نداریم، بنابراین ممکن است از هر طرف توپر یا توخالی باشد. در نتیجه هریک از نمودارهای «الف»، «ب»، «پ»، و «ت» می‌توانند نمودار تابع f باشند. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ نمودار f و f')

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$\text{شیب نیم مماس چپ}=f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{|-x^2+x|-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x(x-1)}{x-1}=-1$$

$$\Rightarrow y-0=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+1 \text{ معادله نیم مماس چپ}$$

توجه: برای تعیین قدرمطلق می‌توانیم از جدول تعیین علامت استفاده کنیم:

x		0		1
$-x^2+x$	$-$		$+$	$-$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ معادله نیم مماس)

۱۴- گزینه «۱» ـ روش اول: صورت و مخرج را در مزدوج عبارت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-5x})\times\frac{x-\sqrt{x^2-5x}}{x-\sqrt{x^2-5x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2-5x)}{x-\sqrt{x^2-5x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{x-|x|}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$$

روش دوم: نکته:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+bx+c}=\lim_{x\to\pm\infty}|x+\frac{b}{2}|$$

بنابراین با کمک این نکته داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-5x})=\lim_{x\to-\infty}(x-x+\frac{5}{2})=\frac{5}{2}$$

(مشابه کنکور سراسری تجربی ـ ۹۸) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ حد در بی‌نهایت)

۱۵- گزینه «۳» ـ اگر $n>2$ باشد، حاصل حد بی‌نهایت می‌شود. اگر $n<2$ باشد، حاصل حد ۲ خواهد شد. از آن‌جایی که حاصل حد۲ یا بی‌نهایت نشده است، بنابراین باید $n=2$ باشد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{ax^n-1}}{x+\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{ax^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-\sqrt{a})x}{x}=2-\sqrt{a} \Rightarrow 2-\sqrt{a}=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a+n=1+2=3$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ حد در بی‌نهایت)

۱۶- گزینه «۱» ـ با توجه به حدود داده شده، تنها گزینه ممکن، گزینه «۱» است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ دروس اول و دوم ـ حد بی‌نهایت، حد در بی‌نهایت)

۱۷- گزینه «۲» ـ تعداد کل حالت‌ها برابر است با تعداد حالت‌هایی که تفاضل اعداد دو تاس بیشتر از ۳ باشد، بنابراین:

$$S=\{(1,5)(1,6)(2,6)(5,1)(6,1)(6,2)\} \Rightarrow n(s)=6$$

از بین اعضای مجموعه بالا در ۴ تای آن‌ها یکی از اعداد ۶ است، پس $n(A)=4$.

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل هفتم ـ درس اول ـ احتمال شرطی)

۱۸- گزینه «۲» ـ اگر A پیشامد قبول شدن در امتحان شیمی و B پیشامد قبول شدن در امتحان زیست باشد، احتمال اینکه فقط در امتحان شیمی قبول شود برابر است با:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0/7-0/42=0/28$$

احتمال اینکه فقط در امتحان زیست قبول شود برابر با:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0/6-0/42=0/18$$

بنابراین احتمال اینکه فقط در یکی از امتحان‌ها قبول شود، برابر است با:

$$P(A-B)+P(B-A)=0/28+0/18=0/46$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل هفتم ـ درس اول ـ احتمال)

۱۹- گزینه «۴» ـ اگر پیشامد بارش باران را با A و پیشامد تصادف را با B نشان دهیم، داریم:

$$P(A)=\frac{1}{6},P(B)=\frac{1}{5},P(A\cap B)=\frac{1}{12} \Rightarrow P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل هفتم ـ درس اول ـ احتمال شرطی)

۲۰- گزینه «۳» ـ

$$P(A-B)=P(A\cap B'),P(A\mid B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{\frac{3}{10}}{P(B')} \Rightarrow P(B')=\frac{2}{5} \Rightarrow P(B)=1-P(B')=\frac{3}{5}$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{1}{10}=\frac{3}{5}-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل هفتم ـ درس اول ـ احتمال شرطی)

۲۱- گزینه «۱» ـ

$$P=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{فرزند اول دختر باشد}}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{فرزند سوم پسر باشد}}=\frac{1}{4}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل هفتم ـ درس اول ـ پیشامدهای مستقل)

۲۲- گزینه «۴» ـ دو حالت داریم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد:

$$\frac{4}{}\times\frac{3}{}\times\frac{2}{}\times\underbrace{\frac{1}{}}_{0}=24$$

حالت دوم: رقم یکان ۴ یا ۶ باشد:

$$\frac{3}{}\times\frac{3}{}\times\frac{2}{}\times\underbrace{\frac{2}{}}_{4\text{ یا }6}=36$$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$36+24=60$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل ششم ـ درس اول ـ شمارش)

۲۳- گزینه «۱» ـ

$$\underbrace{4!}_{\substack{\text{جایگشت‌های کتاب‌های}\\ \text{سال دوم}}}\times\underbrace{3!}_{\substack{\text{جایگشت‌های کتاب‌های}\\ \text{سال اول}}}\times\underbrace{\binom{6}{4}}_{\substack{\text{انتخاب ۴ کتاب}\\ \text{از ۶ کتاب سال دوم}}}\times\underbrace{\binom{5}{3}}_{\substack{\text{انتخاب ۳ کتاب}\\ \text{از ۵ کتاب سال اول}}}$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل ششم ـ درس سوم ـ ترکیب)

۲۴- گزینه «۳» ـ در اینجا چون ترتیب مهم است، باید از فرمول $p(n , r)$ استفاده کنیم.

$$n(S) = P(۱۰ , ۳) = \frac{۱۰!}{۷!} = ۱۰ \times ۹ \times ۸$$

$$n(A) = P(۵ , ۲) \times P(۴ , ۱) = \frac{۵!}{۳!} \times \frac{۴!}{۳!} = ۵ \times ۴ \times ۴$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۵ \times ۴ \times ۴}{۱۰ \times ۹ \times ۸} = \frac{۱}{۹}$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل هفتم ـ درس اول ـ احتمال)

۲۵- گزینه «۲» ـ

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۳}} = \frac{۱۸}{۳۵}$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل هفتم ـ درس اول ـ احتمال)