

ریاضیات

۱- گزینه «۲» -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^n}{ax^2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^2 + 7x^2 - 2} = \frac{\frac{4}{8} - \frac{6}{4} + 1}{\frac{2}{4} + \frac{7}{4} - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{2})(4x^2 - 4x - 2)}{(x - \frac{1}{2})(2x^2 + 8x + 4)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x - 2}{2x^2 + 8x + 4} \\ &= \frac{4 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{2} - 2}{2 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{2} + 4} = \frac{1 - 2 - 2}{\frac{1}{2} + 4 + 4} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = \frac{-6}{17} \end{aligned}$$

(سراسری) پایه دوازدهم - حد - حد در بی نهایت و حد $(\frac{0}{0})$

۲- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 8x}}{3x + \sqrt{8x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2}}{3x + \sqrt{8x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + |x|}{3x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

(نصیری) پایه دوازدهم - حد - حد در بی نهایت

۳- گزینه «۲» - تابع در $+\infty$ از مقادیر بیشتر به نزدیک می شود و در $-\infty$ از مقادیر کمتر به نزدیک می شود.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = |1| = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = [1^-] = 0$$

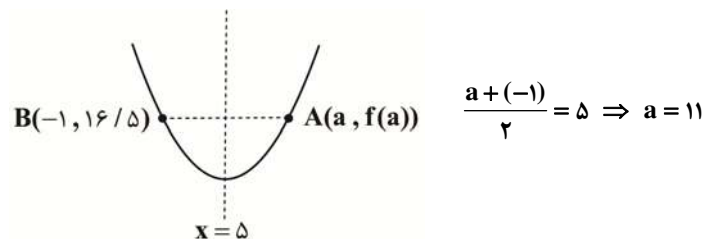
حاصل حد برابر ۱ خواهد بود. (نصیری) پایه دوازدهم - حد - حد در بی نهایت

۴- گزینه «۴» -

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h(4+h)} = 2 + f'(4) \Rightarrow \frac{1}{4} f'(4) = 2 + f'(4) \Rightarrow f'(4) = -4$$

(نصیری) پایه دوازدهم - مشتق - مشتق (تعریف مشتق)

۵- گزینه «۴» - $f'(a) = -f'(-1)$ است، پس دو نقطه با طول های a و -1 نسبت به خط تقارن سهمی، قرینه یکدیگرند.



(نصیری) پایه دوازدهم - مشتق - شیب خط مماس

۶- گزینه «۲» - خط مماس در نقطه $(3, f(3))$ محور x ها را در نقطه ای بیشتر از ۴ قطع می کند. همچنین شیب آن منفی می باشد، پس گزینه ای صحیح است که به ازای $y = 0$ طول بزرگ تر از ۴ بدهد.

$$4x + 5y = 20 \xrightarrow{y=0} x = 5$$

سایر گزینه ها این شرایط را ندارد. (نصیری) پایه دوازدهم - مشتق - خط مماس

۷- گزینه «۳» - شیب خط مماس در نقطه A مثبت و از همه نقاط مشخص شده دیگر بیشتر است. شیب خط مماس در نقاط B و C منفی است، اما در نقطه C شیب خط مماس بیشتر است.

$$0 > m_C > m_B \Rightarrow |m_C| < |m_B|$$

در نقطه C شیب منفی و در نقطه A شیب مثبت است، اما اندازه شیب در نقطه A بیشتر است، پس $m_A + m_C > 0$ است. در نقطه D شیب مثبت است. (نصیری) پایه دوازدهم - مشتق - شیب خط مماس

۸- گزینه «۱» - با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$f'(2) + \frac{1}{f'(2)} = 2 \Rightarrow f'(2) = 1$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

(نصیری) پایه دوازدهم - مشتق - تعریف مشتق و شیب خط مماس

۹- گزینه «۴» - تابع $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است زیرا:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

حال مشتق تابع را در $x = 2$ حساب می‌کنیم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)\left[-\frac{x}{2}\right]}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[-\frac{x}{2}\right] = -2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)\left[-\frac{x}{2}\right]}{x-2} = - \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-\frac{x}{2}\right] = 1$$

$$f'_+(2) - f'_-(2) = -2 - 1 = -3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق پذیری)

۱۰- گزینه «۳» -

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2} f'(1)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(\sqrt{x} + 1)^2} = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{4}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - تعریف و محاسبه مشتق)

۱۱- گزینه «۱» -

$$f \times g = \underbrace{(x^f - 16)}_{h(x)} \underbrace{(x+2)(x^2 + 4)}_{g(x)}$$

$$h(2) = 0, h'(x) = fx^f$$

$$(fg)'(2) = h'(2)g(2) = 4 \times 8 \times 4 \times 8 = 2^{10} = 1024$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - قوانین مشتق گیری)

۱۲- گزینه «۱» -

$$f(x) = (x+2)\sqrt{x^2 + 5}, f(-2) = 0, f'(-2) = 1 \times \sqrt{4+5} = 3$$

$$\text{خط مماس: } y - 0 = 3(x+2) \xrightarrow{x=0} y = 6$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - قوانین مشتق گیری و مماس)

۱۳- گزینه «۴» - در همسایگی راست $x = 2$ داریم:

$$f(x) = x - (x^2 - 4) = x - x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2x \Rightarrow f'_+(2) = 1 - 4 = -3$$

در همسایگی چپ $x = 2$ داریم:

$$f(x) = x + (x^2 - 4) = x + x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x \Rightarrow f'_-(2) = 5$$

مجموع شیب‌های نیم‌مماس چپ و راست برابر $(-3 + 5 = 2)$ می‌باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق‌های یک طرفه)

۱۴- گزینه «۳» -

$$(fg)(x) = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^{1400} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^{1400} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$$

$$h(x) = (fg)^2(x) = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2 = x+1+x+2\sqrt{x^2+x} = 2x+1+2\sqrt{x^2+x}$$

$$h'(x) = 2 + \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} \Rightarrow h'(1) = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - قوانین مشتق گیری)

۱۵- گزینه «۳» -

$$h'(x) = \frac{f'(x)(2g(x)-1) - 2g'(x)(f(x)+1)}{(2g(x)-1)^2} \Rightarrow h'(1) = \frac{f'(1)(2g(1)-1) - 2g'(1)(f(1)+1)}{(2g(1)-1)^2}$$

$$h'(1) = \frac{3(2 \times 1 - 1) - 2 \times 2(3+1)}{(2 \times 1 - 1)^2} = 3 - 16 = -13$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - قوانین مشتق گیری)

۱۶- گزینه «۳» - باید بین E و I فقط یکی از حرف های P و R و D را بگذاریم (حالت ۳) ترتیب خود E و I با هم ۲! حالت دارد. پس تا اینجا دسته **E O I** در کنار دو حرف دیگر را داریم که با هم ۳! حالت دارند. پس طبق اصل ضرب $3 \times 2! \times 3! = 36$ حالت داریم.

(نصیری) (پایه دهم - شمارش - اصل ضرب و فاکتوریل)

۱۷- گزینه «۳» -

$$\begin{cases} n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16 \\ n(A) = \binom{4}{2} + \binom{4}{1} + \binom{4}{0} = 6 + 4 + 1 = 11 \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{11}{16}$$

(نصیری) (پایه دهم - احتمال - احتمال مقدماتی)

۱۸- گزینه «۴» - باید کتاب های ریاضی و فیزیک یکی در میان باشند پس کل حالات یکی در میان $5! \times 6!$ خواهد بود.

(نصیری) (پایه دهم - شمارش - جایگشت)

۱۹- گزینه «۲» -

$$P(6,4) = P(4,2) + P(5,2) + n \Rightarrow \frac{6!}{2!} = \frac{4!}{2!} + \frac{5!}{3!} + n \Rightarrow n = 360 - 12 - 20 = 328$$

$$P(n, n-1) = \frac{n!}{1!} = n! = 328!$$

(نصیری) (پایه دهم - شمارش - ترتیب)

۲۰- گزینه «۳» - باید اختلاف دو عدد رو شده ۳ باشد:

$$A = \{(1,4)(4,1)(2,5)(5,2)(3,6)(6,3)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(نصیری) (پایه دهم - احتمال - احتمال مقدماتی)

۲۱- گزینه «۱» - اگر احتمال قبولی آرمیتا را $P(A)$ و احتمال قبولی هلیا را $P(H)$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$P(A) = 4P(H), P(A \cup H) = \frac{23}{50}$$

قبولی دو فرد مستقل اند:

$$P(A) + P(H) - P(A) \times P(H) = P(A \cup H)$$

$$4P(H) + P(H) - 4P(H) \times P(H) = \frac{23}{50} \Rightarrow 4(P(H))^2 - 5P(H) + \frac{23}{50} = 0 \Rightarrow P(H) = \frac{1}{10}, \frac{23}{50}$$

$$P(H) = \frac{1}{10} \text{ قابل قبول است. (نصیری) (پایه یازدهم - احتمال - احتمال شرطی)}$$

۲۲- گزینه «۴» -

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), P(B - A) = \frac{1}{4}, P(B | A) = \frac{5}{8}$$

$$P(B | A) = P(B) = \frac{5}{8}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{5}{8} - P(B \cap A) \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow \frac{3}{8} = P(A) \times \frac{5}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{5}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{3}{8} = \frac{24 - 15}{40} = \frac{9}{40}$$

$$P(A - B) + P(B - A) = \frac{9}{40} + \frac{1}{4} = \frac{19}{40}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - احتمال - احتمال شرطی)

۲۳- گزینه «۴» -

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{1}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 4}{10!} = \frac{5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - احتمال - احتمال شرطی)

۲۴- گزینه «۲» -

$$P = (دومی دختر) \times (اولی دختر) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - احتمال - احتمال شرطی)

۲۵- گزینه «۲» -

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - احتمال - احتمال شرطی)