ریاضی

۱- گزینه «۳» ــ در واقع باید یکی از ارقام عدد ۳ باشد و از سه رقم {۸ , ۷ , ۵} دو تا انتخاب خواهیم کرد:

$$\underset{\text{عدد ۳}}{۱}\times\binom{۳}{۲}\times ۳! = ۱۸$$

(نصیری) (پایه دهم ــ شمارش بدون شمردن ــ ترکیب) (متوسط)

۲- گزینه «۳» ــ تنها دو عدد طبیعی وجود دارد که فاکتوریل آن‌ها سه‌رقمی است.

$$۵! = ۱۲۰ \,,\, ۶! = ۷۲۰$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{۲} = ۵ \Rightarrow x = ۱۰ \\ \dfrac{x}{۲} = ۶ \Rightarrow x = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۲۲$$

(نصیری) (پایه دهم ــ شمارش بدون شمردن ــ نماد فاکتوریل) (متوسط)

۳- گزینه «۳» ــ از چهار رقم موردنظر دو رقم آن اعداد فرد ۱ و ۳ و دو رقم آن اعداد زوج ۲ و ۴ باید باشند.

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{\text{دو رقم فرد و دو رقم زوج}} \Rightarrow \underbrace{\binom{۴}{۲}\times ۲\times ۲}_{\text{زوج ها}}\times \underbrace{۲\times ۲}_{\text{فردها}} = ۹۶$$

(نصیری) (پایه دهم ــ شمارش بدون شمردن ــ ترکیب) (دشوار)

۴- گزینه «۲» ــ حالاتی که حاصل‌ضرب اعداد رو شده مربع کامل باشند را در جدول زیر علامت زده‌ایم:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	✓			✓		
۲		✓				
۳			✓			
۴	✓			✓		
۵					✓	
۶						✓

$$P(A) = \frac{۸}{۳۶} = \frac{۲}{۹}$$

(نصیری) (پایه دهم ــ احتمال ــ احتمال مقدماتی) (متوسط)

۵- گزینه «۲» ــ اگر تعداد پسرها بیش‌تر از دخترها باشند، باید سه پسر و یک دختر و یا این‌که چهار پسر داشته باشد:

$$P_۱ = \frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۵}{۱۶}$$

اگر تعداد دخترها و پسرها برابر باشند، آن‌گاه:

$$P_۲ = \frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴} = \frac{۶}{۱۶}$$

$$\frac{P_۱}{P_۲} = \frac{۵}{۶}$$

(نصیری) (پایه دهم ــ احتمال ــ احتمال مقدماتی) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ــ برای آن‌که مجموع اعداد رو شده فرد باشد، باید یکی از اعداد زوج و یکی از آن‌ها فرد باشد که در این صورت $n(S)=18$ خواهد شد. حال خانه‌هایی که مجموع دو عدد رو شده بیش‌تر از ۹ یا برابر ۹ باشد را علامت می‌زنیم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						✓
۴					✓	
۵				✓		✓
۶			✓		✓	

متمم این پیشامد جواب مسئله است.

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{6}{18}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ احتمال ــ احتمال شرطی) (متوسط)

۷- گزینه «۱» ــ

$$P(B\mid A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(A)}{1-P(A)}=\frac{\frac{4}{5}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{11}{20}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times 11}{20\times 3}=\frac{11}{15}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ احتمال ــ احتمال شرطی) (آسان)

۸- گزینه «۱» ــ چون حاصل حد یک عدد حقیقی مخالف صفر شده است، پس باید درجه‌های صورت و مخرج برابر باشند.

$$b+1=4 \Rightarrow b=3$$

حاصل حد برابر $\frac{2}{3}$ است، پس:

$$\frac{a+1}{a+b}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a+1}{a+3}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3a+3=2a+6 \Rightarrow a=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a(x+a)}{bx+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}=1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ حد ــ حد در بی‌نهایت) (آسان)

۹- گزینه «۱» ــ دو حالت رخ می‌دهد.

حالت ۱) اگر چند جمله‌ای درجه سوم باشد.

$$\lim_{x\to-\infty}(a+1)x^3=+\infty \Rightarrow a+1<0 \Rightarrow a<-1$$

حالت دوم: اگر چند جمله‌ای درجه دوم باشد.

$$a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}((b-1)x^2-1)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(b-1)x^2=+\infty \Rightarrow b-1>0 \Rightarrow b>1$$

بنابراین گزینه «۱» صحیح است که حالت اول در آن صدق می‌کند. (نصیری) (پایه دوازدهم ــ حد ــ حد نامتناهی در بی‌نهایت) (آسان)

۱۰- گزینه «۱» ــ تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است.

$$f(0)=0 \Rightarrow a=0$$

ضمناً $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ است، پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{bx}{\sqrt{x^2}}=2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}=\frac{bx}{x}=2 \Rightarrow b=2$$

پس $a+b=2$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ــ حد ــ حد در بی‌نهایت) (آسان)

۱۱- گزینه «۳» ـ

$$f(x)=x^{۳}\ \Rightarrow\ f(۱)=۱\ \Rightarrow\ A(۱\,,۱)$$

$f'(x)=۳x^{۲}\ \Rightarrow\ f'(۱)=۳\ \Rightarrow$ خط مماس: $y-۱=۳(x-۱)\ \Rightarrow\ y=۳x-۲$

$$g(x)=۳\sqrt[۳]{x}\ \Rightarrow\ g(۱)=۳\ \Rightarrow\ (۱\,,۳)\in g$$

$g(x)=۳\sqrt[۳]{x}\ \Rightarrow\ g'(x)=\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}\ \Rightarrow\ g'(۱)=۱\ \Rightarrow$ خط مماس: $y-۳=۱(x-۱)\ \Rightarrow\ y=x+۲$

دو خط مماس به‌دست آمده را تلاقی می‌دهیم:

$$۳x-۲=x+۲\ \Rightarrow\ ۲x=۴\ \Rightarrow\ x=۲\ \Rightarrow\ y=۴$$

پس دو خط مماس در نقطه‌ای به عرض ۴ متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$\begin{cases}(f+g)'(۴)=۱\\(f-۲g)'(۴)=-۵\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}f'(۴)+g'(۴)=۱\\f'(۴)-۲g'(۴)=-۵\end{cases}\xrightarrow{(-)}\ ۳g'(۴)=۶\ \Rightarrow\ g'(۴)=۲\,,f'(۴)=-۱$$

$$(۳f-g)'(۴)=۳f'(۴)-g'(۴)=۳\times(-۱)-۲=-۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (آسان)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$h(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f(x)g(x))'=(x^{۸}-x^{۳})'\ \Rightarrow\ h(x)=۸x^{۷}-۳x^{۲}\ \Rightarrow\ h(۲)=۸\times۱۲۸-۳\times۴=۱۰۱۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (آسان)

۱۴- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=\underbrace{(x^{۴}-۱)}_{h(x)}\sqrt[۳]{x}\Rightarrow h'(x)=۴x^{۳}$$

تابع $h(x)$ عامل صفرکننده‌ای است که در $x=۱$ و $x=-۱$ پیوسته است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}f'(۱)=h'(۱)\sqrt[۳]{۱}=۴\\f'(-۱)=h'(-۱)\sqrt[۳]{-۱}=۴\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ f'(۱)+۲f'(-۱)=۱۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (متوسط)

۱۵- گزینه «۳» ـ دقت کنید که $D_g=(-\infty\,,۴]$ است، اما:

$$g'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۴-x}}\ \Rightarrow\ D_{g'}=\{x\mid ۴-x>۰\}=(-\infty\,,۴)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ دامنه مشتق) (آسان)

۱۶- گزینه «۲» ـ با توجه به تعریف مشتق:

$$f'(۴)=\lim_{x\to۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{h\to۰}\frac{f(۴+h)-f(۴)}{h}$$

طبق داده مسئله:

$$f'(۴)=۱-\frac{۱}{۲}f'(۴)\ \Rightarrow\ \frac{۳}{۲}f'(۴)=۱\ \Rightarrow\ f'(۴)=\frac{۲}{۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» ـ

$$f'(۲)=\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to۲}\frac{\frac{m}{x}-\frac{m}{۲}}{x-۲}=\frac{-m(x-۲)}{۲x(x-۲)}=\lim_{x\to۲}\frac{-m}{۲x}=-\frac{m}{۴}>\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times(-۴)}m<-۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ شیب خط مماس) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2-1}{h}=\frac{-1}{0^+}=+\infty$$

مقدار حد به‌دست آمده موجود نیست. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق و مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۹- گزینه «۱» ـ تابع f در ۲ پیوسته است، زیرا:

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=0$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{[-x]|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-3(x-2)}{x-2}=-3$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{[-x]|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(2-x)}{x-2}=2$$

$$f'_-(2)\times f'_+(2)=-3\times 2=-6$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۲۰- گزینه «۱» ـ باید معادله $x^2+bx+c=0$ دو ریشه ۱ و ۲ بدهد.

$$\begin{cases}1+2=\dfrac{-b}{1}\ \Rightarrow\ b=-3\\[2mm] 1\times 2=\dfrac{c}{1}\ \Rightarrow\ c=2\end{cases}\ \Rightarrow\ f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2-3x+2}-\sqrt[3]{2}}{x}\times\frac{\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}+\sqrt[3]{2(x^2-3x+2)}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}+\sqrt[3]{2(x^2-3x+2)}+\sqrt[3]{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{x(\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}+\sqrt[3]{2(x^2-3x+2)}+\sqrt[3]{4})}=\frac{-3}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری و تعریف مشتق) (دشوار)

۲۱- گزینه «۳» ـ در نقاط به طول‌های a، c و e حد وجود دارد، اما تابع f در آن‌ها مشتق ندارند، اما در نقطه‌هایی به طول b و d حد و مشتق هر دو وجود ندارند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۲۲- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{4x}{x+1}}}{\sqrt[3]{\dfrac{8x}{x+1}}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x}}-\sqrt{\dfrac{4x}{x}}}{\sqrt[3]{\dfrac{8x}{x}}-1}=\frac{1-2}{2-1}=-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۲۳- گزینه «۴» ـ f در $x=1$ پیوسته است.

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)\ \Rightarrow\ 1+a=1+b\ \Rightarrow\ a=b$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+bx-(1+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+b(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)+b(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1+b)=3+b$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-(1+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)+a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)+a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1+a)=2+a$$

$$\begin{cases}a=b\\ 3+b=2+a\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}a=b\\ 1+b=a\end{cases}\Rightarrow\ \text{نشدنی}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق – مشتق‌پذیری) (ساده)

۲۴- گزینه «۱» ـ تابع f در $x=0$ پیوسته است. حال به محاسبه مشتق‌های چپ و راست می‌پردازیم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-\sqrt[3]{x})=0$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۲۵- گزینه «۱» ـ

$$f'(c) = m_{AB} \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{x^{۲} - c^{۲}}{x - c} = \frac{۲ - (-۶)}{۱ - (-۱)} = \lim_{x\to c} \frac{(x-c)(x+c)}{x - c} = ۴ \Rightarrow ۲c = ۴ \Rightarrow c = ۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق) (متوسط)