

ریاضی

۱ گزینه «۳» - ابتدا حد تابع را وقتی $x \rightarrow -\infty$ می‌یابیم که داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + |x|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(a-1)}{x+2} = a-1$$

سیس با برابری $a-1 = 1$ به $a = 2$ می‌رسیم.

(برابری یا تغییر) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۲ گزینه «۱» - ابتدا معادله خط $f(x) = ax + b$ را به کمک نقاط داده شده می‌یابیم:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{2-(-1)} = 2, (2, 2) \Rightarrow y-2 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x+4$$

سیس وارون آن را به دست می‌آوریم؛ یعنی x را یافته و جای آن را با y عوض می‌کنیم.

$$y = 2x+4 \Rightarrow 2x = y-4 \Rightarrow x = \frac{y-4}{2} \Rightarrow y^{-1} = \frac{x-2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}x-2}{2x+4} = \frac{1}{4}$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد - حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۳ گزینه «۲» - می‌دانیم $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ می‌باشد که می‌بایستی $f'(-2)$ را به عنوان حاصل حد داده شده به دست آوریم.

$$f(x) = 5x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 10x - 2 \Rightarrow f'(-2) = -22$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - مفهوم مشتق - مفهوم مشتق) (آسان)

۴ گزینه «۴» - مطابق مفهوم مشتق که در آن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ می‌باشد در

نقطه $(1, 2)$ واقع بر تابع $f(x)$ و مقدار $f'(1) = 4$ همان شیب خط مماس بوده و برای $g(x)$ یا معادله خط مماس خواهیم داشت:

$$m = 4, (1, 2) \Rightarrow y-2 = 4(x-1) \Rightarrow y = g(x) = 4x-2$$

و $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ می‌باشد.

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - مفهوم مشتق - مفهوم مشتق) (متوسط)

۵ گزینه «۳» - مطابق نمودار شیب خط مماس در نقطه A برابر صفر (مماس افقی) و در نقاط B و D مثبت بوده و در نقطه C منفی است که کمترین مقدار شیب خط مماس در نقاط مشخص شده واقع بر نمودار تابع f خواهد بود.

(کتاب درسی یا تغییر) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - مفهوم مشتق - مفهوم مشتق) (آسان)

۶ گزینه «۲» - تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته بوده و برای تعیین مشتق راست تابع در نقطه $x = 0$ ابتدا مشکل مثبت یا منفی بودن عامل قدرمطلق را به کمک تعیین علامت عبارت داخل آن معلوم می‌کنیم:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$x^2 - 4x$	$+$	$-$	$+$	$+$

مطابق تعیین علامت در همسایگی راست نقطه $x = 0$ ، عبارت داخل قدرمطلق منفی بوده و داریم:

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = -(x^2 - 4x) = -x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'(0) = 4$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۷ گزینه «۳» - تابع $y = [x]$ در نقطه $x = 2$ حد نداشته و نابسته است ولی با ضرب شدن در عامل صفر $(x-2)$ پیوسته خواهد بود زیرا:

$$f(2) = L_1 = L_2 = 0$$

ولی برای مشتق داریم:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)[x] - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} [x] \Rightarrow \begin{cases} f'(2^+) = 2 \\ f'(2^-) = 1 \end{cases}$$

و تابع در نقطه $x = 2$ پیوسته بوده ولی مشتق‌پذیر نخواهد بود.

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۸ گزینه «۴» - شرط مشتق‌پذیری تابع آن است که پیوسته نیز باشد؛ تابع $f(x)$ در نقطه

$x = 1$ پیوسته نمی‌باشد زیرا داریم:

$$f(1) = 1, L_1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x[x] = 1, L_2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = 0$$

بنابراین در این نقطه فاقد مشتق است.

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۹ گزینه «۱» - ابتدا برای پیوستگی تابع در نقطه $x = 1$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} a\sqrt{x} + b = a + b, L_2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x = 2, f(1) = a + b$$

$$\Rightarrow a + b = 2$$

سیس با برابری مشتق‌های راست و چپ تابع در نقطه $x = 1$ داریم:

$$f'(1^+) = a\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{a}{1}, f'(1^-) = 2x + 1 = 3 \Rightarrow \frac{a}{1} = 3 \Rightarrow a = 6$$

$$\Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow 6 + b = 2 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = -2$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۰ گزینه «۱» - تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق نقاط زاویه‌دار یا گوشه‌ای هستند که مشتق‌پذیر نمی‌باشند.

$$f(x) = |x^2(x-1)|$$

یعنی فقط در $x = 1$ گوشه‌ای خواهد بود.

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۱ گزینه «۲» - تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و با خارج کردن از شکل رادیکال برای مشتق خواهیم داشت:

$$f(x) = \sqrt{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - محاسبه مشتق - تابع مشتق) (متوسط)

۱۲ گزینه «۴» - چون $x = 4$ عامل صفر تابع می‌باشد؛ فقط از آن مشتق گرفته و در بقیه جملات ضرب می‌کنیم که داریم:

$$f'(4) = 1 \times \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x} \Rightarrow f'(4) = \frac{2}{16 + 4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

می‌توانسیم با توجه به پیوستگی تابع در نقطه $x = 4$ از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)\sqrt{x}}{x^2 + x - 20} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}}{x+5} = \frac{2}{9} = \frac{1}{4.5}$$

(برابری یا تغییر) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - محاسبه مشتق - تابع مشتق) (متوسط)

۱۳ گزینه «۳» - می‌دانیم شیب خط مماس بر تابع f در نقطه‌ای واقع بر آن همان $m = f'(2)$ خواهد بود.

$$f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(2x+1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{(2 \times 2 + 1)^2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

(برابری یا تغییر) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - محاسبه مشتق - تابع مشتق) (متوسط)

۱۴ گزینه «۳» - تابع پیوسته در $\mathbb{R}$ بوده $f'(x) = 2x^2 - 2$ می‌بایستی با خط $y = 2x$ شیب آن $m = 3$ می‌باشد برابر گردد یعنی داریم:

$$2x^2 - 2 = 3 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

و دو نقطه به دست می‌آیند.

(حتمی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول و دوم - تابع مشتق - مفهوم مشتق) (متوسط)

۱۵ گزینه «۳» - تابع در E پیوسته بوده و در نقطه $x=2$ (رشته ساده قدرمطلق) نقطه زایبهدار با گوشه‌ای و در نقطه $x=0$ (رشته داخل رادیکال درجه فرد) دارای مماس قائم بوده که در این نقاط مشتق موجود نبوده و دلته مشتق‌پذیری به صورت $Df' = E - \{0, 2\}$ بوده و $\alpha + \beta = 2$ می‌باشد.

(جانبی) (پایه یازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۶ گزینه «۴» - می‌دانیم عددی در ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن اعداد صفر یا ۵ باشد، بنابراین دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.
(۱) اگر رقم یکان صفر باشد:

$$3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

(۲) اگر رقم یکان ۵ باشد:

$$2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$$

بنابر اصل جمع داریم:

$$4 + 6 = 10$$

(شماره‌ری با تعبیر) (پایه دهم - فصل ششم - ترکیب - شمارش) (متوسط)

۱۷ گزینه «۴» - برای رشته آومبیل ۲ حالت داریم و چون یک نفر در جایگاه راننده قرار می‌گیرد برای سه نفر دیگر ۳! جایگشت خواهیم داشت و در مجموع $2 \times 3!$ یعنی ۱۲ حالت به دست می‌آید.

(جانبی) (پایه دهم - فصل ششم - ترکیب - شمارش) (متوسط)

۱۸ گزینه «۳» - با کنار گذاشتن فرد مورد نظر به انتخاب $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ می‌رسیم که برابر ۴ می‌باشد.

(جانبی) (پایه دهم - فصل ششم - ترکیب - شمارش) (متوسط)

۱۹ گزینه «۱» - فضای نمونه‌ای انتخاب ۴ نفر از ۹ نفر دانش‌آموز است و در حالتی که فضای انتخابی دو گروه مساوی باشد داریم:

$$P(A) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{10 \times 6}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5 \times 2}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

$$\text{زیرا ابتدا مطابق رابطه } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ داریم}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

و برای $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 9 \times 2 \times 7$$

(جانبی) (پایه دهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال - مبرها) (متوسط)

۲۰ گزینه «۴» - فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس برابر $n(S) = 6 \times 6 = 36$ حالت می‌باشد و با توجه به تعریف عدد اول P که فقط دارای عوامل P و ۱ در تجزیه است تعداد عضوهای مجموعه حاصل ضرب برآمدهای اول عبارتند از:

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 5), (5, 1), (5, 2)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(جانبی) (پایه دهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال - فضای نمونه) (متوسط)

۲۱ گزینه «۳» - در احتمال شرطی با وقوع پیشامد B تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای کاهش یافته و احتمال A را در فضای B محاسبه خواهیم کرد.

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

$$P(A|B) = \frac{2}{5} = 0.4$$

(جانبی) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال شرطی) (متوسط)

۲۲ گزینه «۴» - شرکت دو نفر در یک مسابقه، دو پیشامد مستقل بوده و داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{5+6-2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6$$

از طرفی اگر A و B مستقل باشند رابطه زیر برقرار بوده و خواهیم داشت:

$$P(A \cup B) = 1 - P(A') \cdot P(B') \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

(جانبی) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال - احتمال مستقل) (متوسط)

۲۳ گزینه «۳» - برای دو پیشامد مستقل A و B رابطه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ برقرار بوده و داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$$\Rightarrow P(A|B) + P(B|A) = P(A) + P(B)$$

(جانبی) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال - احتمال شرطی) (متوسط)

۲۴ گزینه «۲» -

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.2 = \frac{P(A \cap B)}{0.4} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.08$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} - \frac{8}{100} = \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{8}{100}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{62}{100}$$

(جانبی) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال - احتمال شرطی) (متوسط)

۲۵ گزینه «۱» - چون فصل تولد افراد پیشامدهای مستقل می‌باشد خواهیم داشت:

$$P(A) = \frac{4}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = 1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

(جانبی) (پایه یازدهم - فصل هفتم - درس اول - احتمال - احتمال مستقل) (متوسط)