حسابان

۱- گزینه «۱» ـ بررسی موارد:

الف) شیب در نقاط A و B منفی است و $|m_A|>|m_B|$، پس $m_B < m_A$.

ب) شیب در نقطه A منفی و در نقطه C مثبت است و $|m_C|>|m_A|$. بنابراین $m_A + m_C > 0$.

پ) شیب در نقطه D مثبت و در نقطه B منفی است، پس $m_D > m_B$.

ت) با توجه به اینکه $|m_B|>|m_D|$، پس $|m_B|-|m_D|>0$. فقط مورد (ت) صحیح است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ آشنایی با مفهوم مشتق)

۲- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-f(2))(f^2(x)+f^2(2)+f(2)f(x))}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}(f^2(x)+f^2(2)+f(2)f(x))=f'(2)\times 3f^2(2)=4\times 12=48$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ آشنایی با مفهوم مشتق)

۳- گزینه «۴» ـ $f'(2)$ برابر است با شیب خط بر نمودار در نقطه $x=2$. و همچنین برابر است با شیب خط گذرا از دو نقطه $(2,2)$, $(5,6)$:

$$f'(2)=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{6-2}{3}=\frac{4}{3}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ آشنایی با مفهوم مشتق)

۴- گزینه «۱» ـ

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=1+a\,,\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=b\ \xrightarrow{\text{پیوسته است } x=1 \text{ در } f}\ 1+a=b\qquad (*)$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{bx-1-a}{x-1}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{bx-b}{x-1}=b$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق چپ و راست در } x=1 \text{ برابرند.}}\ b=2\ \xrightarrow{(*)}\ a=1\ \Rightarrow\ a+b=3$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری و پیوستگی)

۵- گزینه «۱» ـ تابع «الف» در نقطه x_0 دارای مماس قائم است، پس x_0 نقطه گوشه‌ای نیست. همچنین توابع «ب» و «پ» در x_0 پیوسته نیستند. پس x_0 نمی‌تواند نقطه گوشه‌ای باشد. اما در تابع «ت»، x_0 نقطه گوشه‌ای است. چون مشتق چپ و راستش متناهی و نابرابرند.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ نقطه گوشه‌ای)

۶- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=0\qquad \lim_{x\to 1^-}f(x)=1$$

چون حد چپ و راست تابع در $x=1$ برابر نیست، پس تابع در این نقطه پیوسته نیست.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری و پیوستگی)

۷- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0\ \Rightarrow$$ f در $x=0$ پیوسته است.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$\Rightarrow$ $x=0$ مماس قائم تابع f است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مماس قائم)

۸- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2-h)-f(2+h)}{2h}=\frac{1}{2}\Big(\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)+f(2)-f(2+h)}{h}\Big)=\frac{1}{2}\Big(-\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}-\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\Big)=$$

$$=-\frac{1}{2}\Big(\lim_{t\to 0^-}\frac{f(2+t)-f(2)}{t}+\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\Big)=-\frac{1}{2}\big(f'_-(2)+f'_+(2)\big)=\frac{-1}{2}(2+1)=-\frac{3}{2}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق چپ و راست)

۹- گزینه «۴» ـ

$$2y-x-1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow m=\frac{1}{2} \Rightarrow f'(2)=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{x=2} y=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow f(2)=\frac{3}{2} \Rightarrow f'(2)+f(2)=2$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ خط مماس بر منحنی و مفهوم مشتق)

۱۰- گزینه «۳» ـ

شیب نیم مماس چپ $=f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|-x^2+x|-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x^2+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x(x-1)}{x-1}=-1$

$\Rightarrow y-0=-1(x-1) \Rightarrow$ معادله نیم مماس چپ $y=-x+1$

توجه: برای تعیین قدرمطلق می‌توانیم از جدول تعیین علامت استفاده کنیم:

x		0		1	
$-x^2+x$	$-$		$+$		$-$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ معادله نیم مماس)

۱۱- گزینه «۳» ـ از آنجا که $x=0$ نقطه گوشه‌ای است، پس f در این نقطه پیوسته است:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=a^2+b\,,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=5 \Rightarrow a^2+b=5 \qquad (*)$$

$$\begin{cases} f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-a)^2+b-(a^2+b)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x-2a)}{x}=-2a \\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|+5-(a^2+b)}{x}\overset{(*)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x+5-5}{x}=-1 \end{cases} \xrightarrow{f'_-(0)=f'_+(0)+3} -1=-2a+3 \Rightarrow a=2 \xrightarrow{(*)} b=1$$

$$\Rightarrow a+b=3$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ نقطه گوشه‌ای)

۱۲- گزینه «۲» ـ

$$x^2-x^3=0 \Rightarrow x^2(-x+1)=0$$

	0		1	
$+$		$+$		$-$

$$\lim_{x\to 0}f(x^2-x^3)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=1$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ حدهای یک طرفه)

۱۳- گزینه «۲» ـ با توجه به اینکه $x=2$ در دامنه تابع است اما f در این نقطه حد ندارد، نتیجه می‌شود $x=2$ ریشه عبارت زیر رادیکال است:

$$ax-4=0 \xrightarrow{x=2} 2a-4=0 \Rightarrow a=2$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

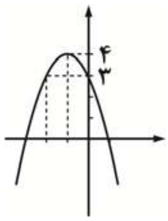
(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس چهارم ـ محاسبه حد توابع کسری)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$\begin{cases}\sqrt{۴-x^۲} \;\Rightarrow\; ۴-x^۲>۰ \;\Rightarrow\; -۲<x<۲ \\ [x]-۱\neq ۰ \;\Rightarrow\; [x]\neq ۱ \;\Rightarrow\; x\in R-[۱,۲)\end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f=(-۲,۱)$$

با توجه به بازه به‌دست آمده تنها گزینه «۴» درست است. (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ همسایگی)

۱۵- گزینه «۳» ـ



$$-x^۲-۲x+۳=-(x+۱)^۲+۴$$

$$\lim_{x\to -۱}[\sqrt{f(x)}]=[\sqrt{۴^-}]=[۲^-]=۱$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ حدهای یک طرفه)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\sin^۲\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{\sin^۲\frac{x}{۲}}=۲$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس چهارم ـ حد توابع کسری (حالت $\frac{۰}{۰}$))

۱۷- گزینه «۲» ـ از تغییر متغیر $x-\pi=t$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^۲x(۱+\cos x)}{(x-\pi)^۴}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin^۲t(۱-\cos t)}{t^۴}\times\frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin^۲t\sin^۲t}{t^۴(۱+\cos t)}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱}{۱+\cos t}=\frac{۱}{۲}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس چهارم ـ حد توابع کسری (حالت $\frac{۰}{۰}$))

۱۸- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\cos a \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^-}([x]-a)\cos ۲=(a-۱-a)\cos ۲=-\cos ۲ \qquad (۲)$$

$$f(a)=-\cos b \qquad (۳)$$

$$\cos a=-\cos b=-\cos ۲ \;\Rightarrow\; a+b=\pi$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس پنجم ـ پیوستگی)

۱۹- گزینه «۳» ـ می‌دانیم توابع $y=[x]$ و $y=x-[x]$ در نقاط صحیح از راست پیوسته هستند، بنابراین این توابع در بازه $[۲,۳)$ پیوسته‌اند.

تابع $y=\tan x$ فقط در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\,,\,k\in Z$ تعریف نشده و در نتیجه ناپیوسته است و چون بازه $[۲,۳)$ شامل چنین نقاطی نیست، پس روی آن پیوسته است. تابع $y=[x]+[-x]$ در نقاط صحیح از راست ناپیوسته است، در نتیجه در بازه $[۲,۳)$ پیوسته نیست.

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس پنجم ـ پیوستگی در بازه)

۲۰- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to ۶^-}f(x)=\lim_{x\to ۶^-}\frac{|x-۶|}{۴(۳۶-x^۲)}=\lim_{x\to ۶^-}\frac{-(x-۶)}{-۴(x-۶)(x+۶)}=\frac{۱}{۴۸}$$

$$\lim_{x\to ۶^+}g(x)=\lim_{x\to ۶^+}\frac{\sqrt{x+۳}-۳}{(x-۶)(x+۲)}\times\frac{\sqrt{x+۳}+۳}{\sqrt{x+۳}+۳}=\lim_{x\to ۶^+}\frac{x-۶}{(x-۶)(x+۲)(\sqrt{x+۳}+۳)}=\frac{۱}{۴۸}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس چهارم ـ حد توابع کسری (حالت $\frac{۰}{۰}$))