

حسابان

۱- گزینه «۲» - خط مماس در نقطه $(3, f(3))$ محور x ها را در نقطه‌ای بیشتر از ۴ قطع می‌کند. همچنین شیب آن منفی می‌باشد. پس گزینه‌ای صحیح است که به ازای $y = 0$ طول بزرگ‌تر از ۴ بدهد.

$$4x + 5y = 20 \xrightarrow{y=0} x = 5$$

سایر گزینه‌ها این شرایط را ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - خط مماس)

۲- گزینه «۴» - تابع $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است زیرا:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

حال مشتق تابع را در $x = 2$ حساب می‌کنیم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)\left[-\frac{x}{2}\right]}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[-\frac{x}{2}\right] = -2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)\left[-\frac{x}{2}\right]}{x-2} = - \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-\frac{x}{2}\right] = 1$$

$$f'_+(2) - f'_-(2) = -2 - 1 = -3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق پذیری)

۳- گزینه «۳» -

$$(fg)(x) = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^{1400} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^{1400} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$$

$$h(x) = (fg)^2(x) = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2 = x+1+x+2\sqrt{x^2+x} = 2x+1+2\sqrt{x^2+x}$$

$$h'(x) = 2 + \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} \Rightarrow h'(1) = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - قوانین مشتق‌گیری)

۴- گزینه «۳» -

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)) \xrightarrow{x=0} (f \circ g)'(0) = g'(0)f'(g(0))$$

$$g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2} \text{ و } g(0) = 1 \text{ پس داریم. } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

ضابطه‌ی g را به صورت $g(x) = \sqrt{x+1}$ و ضابطه g' به صورت $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ حد صورت سؤال هم $f'(1)$ است که $\frac{2}{2}$ می‌شود.

$$(f \circ g)'(0) = \frac{1}{2} f'(1) \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق ترکیب دو تابع)

۵- گزینه «۱» -

$$f'(t) = \frac{f(5) - f(0)}{\Delta - 0} \Rightarrow 3t^2 - 2t = \frac{(125 - 25 + 10) - 10}{5} \Rightarrow 3t^2 - 2t = 20 \Rightarrow 3t^2 - 2t - 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 + \sqrt{1+60}}{3} = \frac{1 + \sqrt{61}}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - آهنگ لحظه‌ای و متوسط)

۶- گزینه «۱» -

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 2f'(x) \Rightarrow \frac{10 - 2}{2 - 1} = 2(3x^2 + 1) \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x \in [1, 2]} x = 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - آهنگ لحظه‌ای و متوسط)

۷- گزینه «۴» - اگر ضلع مربع را x فرض کنیم آن‌گاه قطر مربع که همان قطر دایره است برابر $x\sqrt{2}$ خواهد بود. مساحت قسمت هاشورخورده را S در نظر می‌گیریم:

$$4S = \frac{\pi}{4}(x\sqrt{2})^2 - x^2 = \frac{\pi}{2}x^2 - x^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x^2 \Rightarrow S = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x^2 \Rightarrow S' = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x \Rightarrow S'(2) = \frac{\pi}{2} - 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - آهنگ لحظه‌ای)

۸- گزینه «۳» -

$$y = f(\tan x) \Rightarrow y' = (1 + \tan^2 x)f'(\tan x) \Rightarrow (1 + \tan^2 x)f'(\tan x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} \Rightarrow f'(\tan x) = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow f'(\sin x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$y = f(\sin x) \Rightarrow y' = \cos x \times f'(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق ترکیب دو تابع)

۹- گزینه «۳» -

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+2h) - f'(1)}{h} = 2f''(1)$$

$$f(x) = 3x^2 - \cos(x-1) \Rightarrow f'(x) = 6x + \sin(x-1) \Rightarrow f''(x) = 6 + \cos(x-1) \Rightarrow f''(1) = 6 + 1 = 7 \Rightarrow 2f''(1) = 14$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق مرتبه دوم)

۱۰- گزینه «۴» -

$$2a + 3 < 10 < a + 7 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3 < 10 \\ 10 < a + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < \frac{7}{2} \\ a > -3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} -3 < a < \frac{7}{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - همسایگی)

۱۱- گزینه «۳» - بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ موجود نیست.}$$

گزینه «۲»:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ موجود نیست}$$

گزینه «۳»:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

گزینه «۴»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حد از نمودار)

۱۲- گزینه «۲» - این مسئله ارتباطی به مقدار تابع در $x = -3$ ندارد، پس $b \in \mathbb{R}$ است، اما حد چپ و راست باید برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} (ax^2 + 6x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (2x) \Rightarrow 9a - 18 = -6 \Rightarrow a = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حد توابع چند ضابطه‌ای)

۱۳- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^-} ([6x] + [\frac{1}{3x}]) = [6(-\frac{1}{3})^-] + [\frac{1}{3(-\frac{1}{3})^-}] = [(-2)^-] + [\frac{1}{(-1)^-}] = -3 + [(-1)^+] = -3 - 1 = -4$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حد براکت)

۱۴- گزینه «۴» -

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{16 - x^2} \times \frac{\sqrt{x+7} + 3}{\sqrt{x+7} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(4-x)(4+x) \times 6} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{x-4}}{(x-4)(x+4) \times 6 \times 4} = -\frac{1}{192}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حد $\frac{0}{0}$)

۱۵- گزینه «۴» -

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{\sin x}}{(\cancel{\cos x} - \cancel{\sin x})(\cos x + \sin x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}})} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = 2^a \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد - حد $\frac{0}{0}$)

۱۶- گزینه «۴» -

$$f(2) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + b) = b - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5$$

تابع در $x = 2$ پیوسته است پس:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b - 4 = 5 \Rightarrow b = 9 \end{cases} \Rightarrow a + b = 14$$

(نصیری) (پایه یازدهم - حد و پیوستگی - پیوستگی)