حسابان

۱-گزینه «۲» ـ

$$3x-1<4<x+8 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1<4 \Rightarrow x<\frac{5}{3} \\ x+8>4 \Rightarrow x>-4\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} -4<x<\frac{5}{3} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{-3,-2,-1,0,1\}$$

بنابراین ۵ مقدار صحیح وجود دارد. (کتاب درسی با تغییر) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ همسایگی) (آسان)

۲-گزینه «۲» ـ دامنه تابع را حساب می‌کنیم.

$$3-x-2x^2\ge 0 \Rightarrow 2x^2+x-3\le 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x+3)\le 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}\le x\le 1$$

این تابع در $x=1$ و $x=\frac{-3}{2}$ (ریشه‌های زیر رادیکال) حد ندارد.

$$x_1x_2=\frac{-3}{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ حد رادیکالی) (آسان)

۳-گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = 2+2=4$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ حد چندضابطه‌ای) (متوسط)

۴-گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to1^-}(4x+1)=5 \Rightarrow [\lim_{x\to1^-}(4x+1)]=[5]=5$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ حد براکت) (متوسط)

۵-گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+1}{f(x)}=2 \xrightarrow{\lim_{x\to2} f(x)=L} \frac{L+1}{L}=2$$

$$\Rightarrow 2L=L+1 \Rightarrow L=1 \Rightarrow \lim_{x\to2} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to2}(f(x)-g(x))=5 \Rightarrow L-\lim_{x\to2}g(x)=5$$

$$\Rightarrow 1-\lim_{x\to2}g(x)=5\Rightarrow \lim_{x\to2}g(x)=-4 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to2}\sqrt[3]{2g(x)}=\sqrt[3]{2\times(-4)}=-2$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ قضایای حد) (متوسط)

۶-گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{(\sqrt{3x-5}-2)(\sqrt{3x-5}+2)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3}=\frac{6\times4}{3}=8$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ حد ـ $\frac{0}{0}$) (متوسط)

۷-گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2(\frac{\sqrt3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x)}{3(x-\frac{\pi}{3})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin(\frac{\pi}{3}-x)}{-3(\frac{\pi}{3}-x)}=-\frac{2}{3}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ حد ـ $\frac{0}{0}$) (دشوار)

۸-گزینه «۲» ـ

$$f(4)=[\tan\frac{\pi}{4}]=1$$

$$\lim_{x\to4^+}[\tan\frac{\pi}{x}]=[1^-]=0$$

$$\lim_{x\to4^-}[\tan\frac{\pi}{x}]=[1^+]=1$$

بنابراین $f(x)$ در $x=4$ فقط پیوستگی چپ دارد.

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ حد براکت) (دشوار)

۹-گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to\pi}\frac{[-x]}{|\sin x|}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ حدنامتناهی) (متوسط)

۱۰-گزینه «۲» ـ $x=4$ ریشه مخرج است.

$$4^2-4+a=0\Rightarrow a=-12$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-12x^2+6}{x^2-x-12}=-12$$

بنابراین $y=-12$ مجانب افقی تابع است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ مجانب) (متوسط)

۱۱-گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^nf(x)}{ag^2(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n\times2x^3}{a\times x^8}=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n+3=8\Rightarrow n=5\\ \frac{2}{a}=2\Rightarrow a=1\end{cases}\Rightarrow a+n=6$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۱۲-گزینه «۳» ـ مجانب افقی تابع $y=1$ است.

$$\frac{x^2+x-1}{x^2-x+3}=1\Rightarrow x^2-x+3=x^2+x-1$$

$$\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2\Rightarrow A(2,1)$$

$$|OA|=\sqrt{4+1}=\sqrt5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ مجانب) (متوسط)

۱۳-گزینه «۳» ـ در بازه $(-\infty,4)$ مقدار مشتق تابع منفی است. زیرا شیب خطوط مماس در این بازه منفی‌اند. بنابراین جواب سوال نقاط با طول $\{1,2,3\}$ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ شیب مماس) (آسان)

۱۴-گزینه «۲» ـ

$$A=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$$

$$=f'(2)\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$B=\frac{1}{3}\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{1}{3}f'(2)=\frac{5}{3}$$

$$(A+B)^2=(\frac{5}{4}+\frac{5}{3})^2=25(\frac{7}{12})^2=\frac{25\times49}{144}=\frac{1225}{144}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ تعریف مشتق) (متوسط)

۱۵-گزینه «۴» ـ

$$f'(4)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\frac{1}{\sqrt x}-\frac{1}{2}}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt x}{2(x-4)\sqrt x}\times\frac{2+\sqrt x}{2+\sqrt x}=\frac{-1}{2}\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt x(2+\sqrt x)}$$

$$=\frac{-1}{2}\times\frac{1}{2\times4}=\frac{-1}{16}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ تعریف مشتق) (متوسط)

۱۶-گزینه «۳» ـ تابع $f(x)$ در $x=4$ پیوستگی راست دارد و همچنین $f(4)=0$ است.

$$f'_+(4)=\lim_{x\to4^+}\frac{|4-x|[\frac{12}{x}]}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\frac{(x-4)\times2}{x-4}=2$$

حال معادله خط مماس راست را می‌نویسیم.

$$y-0=2(x-4)\Rightarrow y=2x-8$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ مماس راست) (متوسط)

۱۷-گزینه «۴» ـ باید ضریب براکت به ازای $x=-1$ صفر شود.

$$(-1)^3+(-1)+a=0\Rightarrow a=2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۸-گزینه «۳» ـ تابع $h(x)$ در $x=5$ مشتق‌پذیر است.

$$h(x)=(x-5)^2[x]$$

$$h'(5)=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)^2[x]}{x-5}=\lim_{x\to5}(x-5)[x]=0$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۹-گزینه «۲» ـ

$$f'_{-}(-۳)=\lim_{x\to(-۳)^{-}}\frac{\sqrt[۳]{(x+۳)^{۲}}}{x+۳}=\lim_{x\to(-۳)^{-}}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x+۳}}=-\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۲۰-گزینه «۱» ـ $x=۲$ ریشه ساده داخل قدر مطلق است بنابراین مشتق چپ و راست قرینه یکدیگرند. پس:

$$f'_{-}(۲)+f'_{+}(۲)=۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)