حسابان

۱- گزینه «۲» ـ با توجه به تعریف مشتق:

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

طبق داده مسئله:

$$f'(4)=1-\frac{1}{2}f'(4)\ \Rightarrow\ \frac{3}{2}f'(4)=1\ \Rightarrow\ f'(4)=\frac{2}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق) (متوسط)

۲- گزینه «۲» ـ

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{m}{x}-\frac{m}{2}}{x-2}=\frac{-m(x-2)}{2x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-m}{2x}=-\frac{m}{4}>\frac{1}{2}\xrightarrow{\times(-4)}m<-2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ شیب خط مماس) (متوسط)

۳- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2-1}{h}=\frac{-1}{0^+}=+\infty$$

مقدار حد به‌دست آمده موجود **نیست**. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق و مشتق‌پذیری) (متوسط)

۴- گزینه «۱» ـ تابع f در ۲ پیوسته است، زیرا:

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=0$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{[-x]|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-3(x-2)}{x-2}=-3$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{[-x]|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(2-x)}{x-2}=2$$

$$f'_-(2)\times f'_+(2)=-3\times 2=-6$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۵- گزینه «۱» ـ باید معادله $x^2+bx+c=0$ دو ریشه ۱ و ۲ بدهد.

$$\begin{cases}1+2=\frac{-b}{1}\ \Rightarrow\ b=-3\\ 1\times 2=\frac{c}{1}\ \Rightarrow\ c=2\end{cases}\ \Rightarrow\ f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2-3x+2}-\sqrt[3]{2}}{x}\times\frac{\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}+\sqrt[3]{2(x^2-3x+2)}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}+\sqrt[3]{2(x^2-3x+2)}+\sqrt[3]{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{x(\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}+\sqrt[3]{2(x^2-3x+2)}+\sqrt[3]{4})}=\frac{-3}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری و تعریف مشتق) (دشوار)

۶- گزینه «۳» ـ در نقاط به طول‌های a، c و e حد وجود دارد، اما تابع f در آن‌ها مشتق ندارند، اما در نقطه‌هایی به طول b و d حد و مشتق هر دو وجود ندارند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۷- گزینه «۲» ـ

$$a=\lim_{x\to 2}([x]+[-x])=-1$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{-1(0^+)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد بی‌نهایت) (متوسط)

۸- گزینه «۱» ـ

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-2}\times\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+2}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{x^2+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x}{x+3-4}\times\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{x^2+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^3-1)}{x-1}\times\frac{2+2}{1+1}=2\lim_{x\to 1}x(x^2+x+1)=6$$

$$B=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x^2+2x+1)}{x^3+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$A+B=6+1=7$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت) (آسان)

۹- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{\frac{4x}{x+1}}}{\sqrt[3]{\frac{8x}{x+1}}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x}}-\sqrt{\frac{4x}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{8x}{x}}-1}=\frac{1-2}{2-1}=-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۱۰- گزینه «۴» ـ

$$f(-1)=4\ \Rightarrow\ 1-a+1=4\ \Rightarrow\ a=-2$$
$$g(2)=24\ \Rightarrow\ 8b+4+4=24\ \Rightarrow\ 8b=16\ \Rightarrow\ b=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3}{bx^3}=\frac{a}{b}=\frac{-2}{2}=-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» ـ مجانب قائم $x=-1$ ریشه مخرج است.

$$(-1)^3-3(-1)^2+4a=0\ \Rightarrow\ 4a=4\ \Rightarrow\ a=1$$

$$a=1\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{x^3+6x-1}{x^3-3x^2+4}=\frac{x^3+6x-1}{(x+1)(x-2)^2}$$

$$(x-2)^2=0\ \Rightarrow\ x=2\ (\text{مجانب قائم})\Rightarrow b=2$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=1\ \Rightarrow\ y=1\ (\text{مجانب افقی})\Rightarrow c=1$$

پس $b+c=3$ خواهد شد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ مجانب افقی) (دشوار)

۱۲- گزینه «۳» ـ مجانب قائم این تابع $x=1$ است.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\frac{2^{[1^+]}}{1-1^+}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\frac{2^{[1^-]}}{1-1^-}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

پس نمودار تابع در اطراف $x=1$ به‌صورت گزینه سوم است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ مجانب قائم) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» ـ f در $x=1$ پیوسته است.

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)\ \Rightarrow\ 1+a=1+b\ \Rightarrow\ a=b$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+bx-(1+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+b(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)+b(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1+b)=3+b$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-(1+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)+a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)+a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1+a)=2+a$$

$$\begin{cases}a=b\\3+b=2+a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b\\1+b=a\end{cases}\Rightarrow\ \text{نشدنی}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۱۴- گزینه «۱» ـ تابع f در $x = ۰$ پیوسته است. حال به محاسبه مشتق‌های چپ و راست می‌پردازیم:

$$f'_+(۰) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt[۳]{x}}{x} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} = +\infty$$

$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰^-}\frac{-x\sqrt[۳]{x}}{x} = \lim_{x\to ۰^-}(-\sqrt[۳]{x}) = ۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۵- گزینه «۱» ـ

$$f'(c) = m_{AB} \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{x^۲-c^۲}{x-c} = \frac{۲-(-۶)}{۱-(-۱)} = \lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x+c)}{x-c} = ۴ \Rightarrow ۲c=۴ \Rightarrow c=۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق) (متوسط)

۱۶- گزینه «۲» ـ در واقع با یک حد $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}(a\sin x-\cos x)=۰ \Rightarrow a=۱$$

$$b = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{-(\cos x-\sin x)} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x) = -\sqrt{۲} \Rightarrow b^۲ = ۲$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۴}{b^۲(۲x+۱)^۴} = \frac{a}{۱۶b^۲} = \frac{۱}{۱۶\times ۲} = \frac{۱}{۳۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» ـ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $[۱,۲]$ ناپیوسته است، زیرا در $x=۲$ پیوستگی چپ ندارد.

$$f(۲)=۲,\ \lim_{x\to ۲^-}[x]=۱$$

تابع $g(x)=\sqrt{۱-x}$ در دامنه خود یعنی $(-\infty,۱]$ پیوسته است، اما در $x=۱$ حد ندارد و در نتیجه ناپیوسته است، زیرا g در همسایگی راست $x=۱$ تعریف نمی‌شود. (نصیری) (پایه یازدهم ـ حد ـ پیوستگی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$f(\frac{۳\pi}{۴}) = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+}\tan\frac{۳\pi}{۴} = -۱$$

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = a\cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$-\frac{a\sqrt{۲}}{۲} = -۱ \Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to ۳} a\sqrt{۲}\sin\frac{\pi x}{۱۸} = a\sqrt{۲}\sin\frac{\pi}{۶} = \sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۲} = ۱$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ حد ـ پیوستگی) (آسان)

۱۹- گزینه «۳» ـ

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{۳}-\cos x\sin\frac{\pi}{۳}}{(۳x-\pi)(۳x+\pi)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۳(x-\frac{\pi}{۳})(۳x+\pi)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{x-\frac{\pi}{۳}}{۳(x-\frac{\pi}{۳})(۳x+\pi)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۳(۳x+\pi)} = \frac{۱}{۳(\pi+\pi)} = \frac{۱}{۶\pi}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ حد ـ حد $\frac{۰}{۰}$ مثلثاتی) (دشوار)

۲۰- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to ۱^+}([f(x)]+[\frac{۴}{x}]) = [۲^-]+[\frac{۴}{۱^+}] = ۱+[۴^-] = ۴$$

$$\lim_{x\to ۱^-}([f(x)]+[\frac{۴}{x}]) = [۲^-]+[\frac{۴}{۱^-}] = ۱+[۴^+] = ۵$$

پس مقدار این حد وجود ندارد. (نصیری) (پایه یازدهم ـ حد ـ حد براکت) (متوسط)