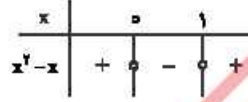


گزینه «۴» - با توجه به هم‌ارزی $\sin x \approx x$ در $x = 0$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2-x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x^2-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



و گزینه «۴» صحیح خواهد بود.

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - محبت نکم - حد بی‌نهایت) (متوسط)

گزینه «۱» - ابتدا مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(a-1)}{x+1} = a-1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 2}}{x+1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام با ضرب و تقسیم در مزدوج رادیکال یا قاعده هویثال عمل می‌کنیم که داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x + \sqrt{x^2 + 2})(2x - \sqrt{x^2 + 2})}{(x+1)(2x - \sqrt{x^2 + 2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x^2 - 2}{(x+1)(2x - \sqrt{x^2 + 2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2}{(x+1)(2x - \sqrt{x^2 + 2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x-1)(x+1)}{-4(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x-1)}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - حد در بی‌نهایت) (متوسط)

گزینه «۲» - چون درجات صورت و مخرج یکسان می‌باشد، حد در بی‌نهایت تابع همان

مجاوب افقی بوده و داریم:

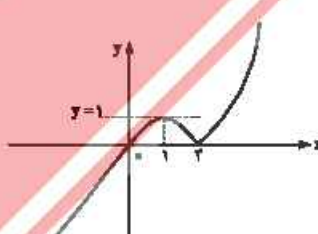
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + x}{x^2 - x + b} = a \Rightarrow a = 2$$

از طرفی مجانب قائم نیز همان ریشه مخرج خواهد بود به شرط $\neq 0$ بودن.

$$x = 1 \Rightarrow x^2 - x + b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a + b = 2 + 0 = 2$$

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول و دوم - جابجاست) (متوسط)

گزینه «۴» - با رسم نمودار تابع داریم:



$$x \geq 2 \Rightarrow y = x(x-2)$$

$$x < 2 \Rightarrow y = -x(x-2)$$

مطابق نمودار خط $y = 1$ جواب مسئله است. از طرفی داریم:

$$y = \pm x(x-2) = \pm x(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = \pm(2x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1$$

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - خط مماس - مفهوم مشتق) (متوسط)

گزینه «۴» - نقطه تماس به ازای $x = 1$ روی خط $y = 2x - 1$ به صورت $A(1, 1)$ بوده

که در معادله تابع صدق می‌کند و داریم:

$$A \in f \Rightarrow a + b = 1$$

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس اول - مفهوم مشتق) (اسل)

گزینه «۲» - در توابع قدرمطلق ریشه ساده داخل قدرمطلق به شرطی که تابع در آن نقطه

پیوسته بوده و مشتق‌های راست و چپ برابر دو عدد متفاوت باشند نقطه زاویه‌دار یا گوشه‌ای

است که در تابع داده شده $x = 1$ می‌باشد.

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری) (متوسط)

گزینه «۴» - تابع مشتق‌پذیر ابتدا می‌بایستی پیوسته نیز باشد، با توجه به پیوستگی تابع در $x = 1$

به $a = 2$ می‌رسیم و در مشتق‌پذیری به کمک برابری مشتق‌های راست و چپ داریم:

$$f'(1^+) = a, f'(1^-) = 2 \Rightarrow a = 2$$

که این امکان‌پذیر نخواهد بود.

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۸. گزینه «۱» - تابع $[x]$ به تنهایی در $x = 1$ پیوسته نبوده و مشتق‌پذیر نیز نخواهد بود ولی با

ضرب شدن در عمل با ریشه مضاعف به شکل $(x-1)^2$ پیوسته و مشتق‌پذیر است که داریم:

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x^2 + ax + b \Rightarrow a = -2, b = 1 \Rightarrow a - b = -3$$

به عبارت دیگر نقطه $x = 1$ می‌بایستی ریشه مضاعف عبارت $y = x^2 + ax + b$ باشد که

در آن صدق کرده و در مشتق آن نیز صدق کند.

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۹. گزینه «۳» - تابع در $x = 4$ زاویه‌دار یا گوشه‌ای و در $x = 0$ دارای مماس قائم بوده و در این

نقاط فاقد مشتق است بنابراین دقت مشتق‌پذیری تابع به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$ بوده و

چون $\alpha < \beta$ به $\alpha = 0$ و $\beta = 4$ می‌رسیم که برای عبارت جزء صحیح خواهیم داشت:

$$\left\lfloor \frac{\beta}{\alpha + 2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 1$$

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - درس دوم - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۰. گزینه «۳» - براساس مفهوم حد تابع که بیانگر همسایگی محدود در $x = a$ بوده و فاقد a

می‌باشد به $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ می‌رسیم.

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس اول - حد و پیوستگی) (اسل)

۱۱. گزینه «۱» - با توجه به نمودار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ می‌باشد و از طرفی برای $[f(x)]$ در

حوالی نقطه $x = 1$ تابع f کوچکتر از ۳ بوده و برابر $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 2$ می‌باشد.

بنابراین $L = 3 - 2 = 1$ خواهد بود.

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل پنجم - درس دوم - حد و پیوستگی) (متوسط)

۱۲. گزینه «۲» - با صدق نمودن دو نقطه $(0, \frac{1}{3})$ و $(-2, 0)$ در ضابطه تابع خواهیم داشت:

$$(0, \frac{1}{3}) \in f \Rightarrow -2 = -4 + 2^b \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$(-2, 0) \in f \Rightarrow 0 = -4 + 2^{a+1} \Rightarrow 2^{a+1} = 4 \Rightarrow \frac{a+1}{2} = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow ab = (-2)(1) = -2$$

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - توابع نمایی و لگاریتم) (متوسط)

۱۳. گزینه «۳» -

$$\log_2(\Delta x + 1) + \log_2 x = 2 \Rightarrow \log_2 x(\Delta x + 1) = 2 \Rightarrow \Delta x^2 + x = 4 \Rightarrow$$

$$\Delta x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \frac{5}{2}$$

$$\text{که فقط } x = \frac{5}{2} \text{ قابل قبول می‌باشد زیرا می‌بایستی } x > 0 \text{ باشد. که } \left[\frac{5}{2}\right] \text{ خواهد بود.}$$

(آرکشی یا تغییر) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - معادله لگاریتمی) (متوسط)

۱۴. گزینه «۱» -

$$\log_2 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\log 2}{2 \log 2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \log 2 = 1/2 \log 2$$

$$\log_2 12 = \frac{\log 12}{\log 2} = \frac{\log 2^2 \times 3}{\log 2} = \frac{2 \log 2 + \log 3}{\log 2} = \frac{2 \log 2 + 1/6 \log 2}{\log 2} \Rightarrow$$

$$\log_2 12 = \frac{2/6 \log 2}{2/6 \log 2} = \frac{2/6}{2/6} = \frac{26}{12}$$

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - محاسبه لگاریتم) (متوسط)

۱۵. گزینه «۳» -

$$f(x) = \sqrt{1 - \log(x-2)}$$

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2, 1 - \log(x-2) \geq 0 \Rightarrow \log(x-2) \leq 1$$

$$\log(x-2) \leq \log 10 \Rightarrow x - 2 \leq 10 \Rightarrow x \leq 12 \Rightarrow$$

$$(x > 2) \cap (x \leq 12) \Rightarrow D_f = (2, 12]$$

(حاشی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - لگاریتم) (متوسط)