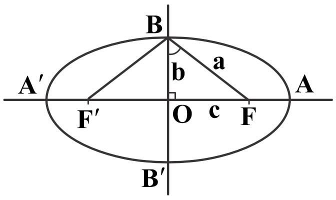
هندسه

۱- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. بنابر فرض مسأله $a = ۲b$.



در مثلث قائم‌الزاویه OBF، بنابر نسبت‌های مثلثاتی:

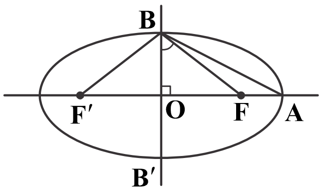
$$\cos(O\hat{B}F) = \frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\hat{B}F = ۶۰^\circ$$

در نتیجه:

$$F\hat{B}F' = ۲(F\hat{B}O) = ۲ \times ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ روابط طولی)

۲- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. بنا بر فرض مسئله:



$$\frac{S_{OAB}}{S_{FBF'}} = ۳$$

دو مثلث OAB و FBF' در ارتفاع OB مشترک هستند. پس نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{FBF'}} = \frac{a}{۲c} = ۳ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۶}$$

یعنی $e = \frac{۱}{۶}$. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ خروج از مرکز)

۳- گزینه «۱» ـ بنابر فرض $OF = AF = ۴$ یعنی $c = a - c = ۴$، پس: $c = ۴ , a = ۸$

به‌دست می‌آید: $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۴۸$.

می‌دانیم DF نصف طول وتر کانونی بیضی است، پس:

$$DF = \frac{b^۲}{a} = \frac{۴۸}{۸} = ۶$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$D = (۴ , ۶)$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ وتر کانونی ـ روابط طولی)

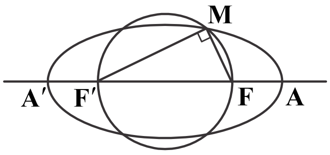
۴- گزینه «۱» ـ چون طول قطرها برابر ۱۰ و ۸ است، پس $a = ۵$ و $b = ۴$. به‌دست می‌آید: $c = \sqrt{a^۲ - b^۲} = ۳$.

بنابر فرض $MF - MF' = ۶$ همچنین می‌دانیم $MF + MF' = ۱۰$. می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} MF + MF' = ۱۰ \\ MF - MF' = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF = ۸ \\ MF' = ۲ \end{cases}$$

مشاهده می‌شود $MF = a + c$ و $MF' = a - c$. بنابراین M یک رأس کانونی است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ اجزای بیضی)

۵- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. از طول قطرها به‌دست می‌آید:



$$\mathbf{a = \sqrt{۵}\ ,\ b = ۱}$$

در نتیجه:

$$\mathbf{c = \sqrt{a^۲ - b^۲} = \sqrt{۵ - ۱} = ۲}$$

پس دایره موردنظر، دایره‌ای به قطر $\mathbf{FF' = ۲c}$ است. در نتیجه از نقطه M، قطر $\mathbf{FF'}$ به زاویه قائمه رؤیت می‌شود و مثلث $\mathbf{MFF'}$ قائم‌الزاویه است.

$$\mathbf{M \in \text{دایره} \ \Rightarrow\ MF + MF' = ۲a = ۲\sqrt{۵} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF \cdot MF' = ۲۰}$$

$$\mathbf{\xrightarrow[\text{رابطه فیثاغورس}]{MF^۲+MF'^۲=۴c^۲=۱۶} ۱۶ + ۲MF \times MF' = ۲۰ \ \Rightarrow\ MF \times MF' = ۲}$$

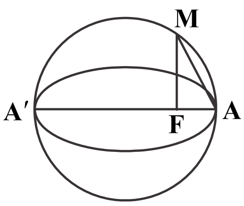
در نهایت به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{S_{MFF'} = \frac{۱}{۲} MF \times MF' = \frac{۱}{۲} \times ۲ = ۱}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ روابط طولی)

۶- گزینه «۴» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. بنابر مسأله ۲ صفحه ۵۷ کتاب درسی $\mathbf{MF = b}$. همچنین $\mathbf{FA = a - c}$.

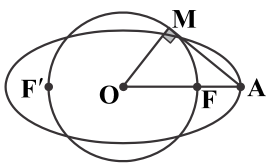
اکنون در مثلث قائم‌الزاویه FMA، بنابر قضیه فیثاغورس:



$$\mathbf{MA = \sqrt{MF^۲ + FA^۲} = \sqrt{b^۲ + (a - c)^۲}}$$
$$\mathbf{= \sqrt{b^۲ + a^۲ + c^۲ - ۲ac} = \sqrt{a^۲ - c^۲ + a^۲ + c^۲ - ۲ac}}$$
$$\mathbf{= \sqrt{۲a^۲ - ۲ac} = \sqrt{۲a(a - c)}}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ دایره اصلی بیضی)

۷- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. مثلث OAM قائم‌الزاویه است و:



$$\mathbf{AM = \sqrt{OA^۲ + OM^۲} = \sqrt{a^۲ - c^۲} = b}$$

با توجه به اطلاعات مسأله، $\mathbf{a = ۱۷}$ و $\mathbf{c = ۱۵}$ بنابراین:

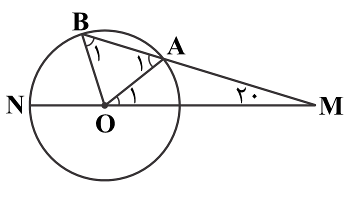
$$\mathbf{b = \sqrt{a^۲ - c^۲} = \sqrt{۱۷^۲ - ۱۵^۲} = ۸}$$

یعنی طول مماس AM برابر ۸ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ اجزا و روابط طولی)

۸- گزینه «۳» ـ Mx بر d عمود است و زاویه FMx برابر °۴۰ است. پس زاویه FM باخط d برابر $\mathbf{۹۰^\circ - ۴۰^\circ = ۵۰^\circ}$ است. از طرف دیگر می‌دانیم MF و $\mathbf{MF'}$ با خط مماس d زوایای مساوی می‌سازند، پس: $\mathbf{F'My = ۵۰^\circ}$ (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ خاصیت انعکاسی)

۹- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. بنابر فرض $\mathbf{OA = AM = R}$، یعنی مثلث OAM متساوی‌الساقین است و $\mathbf{\widehat{O}_۱ = \widehat{M} = ۲۰^\circ}$.

زاویه $\mathbf{A_۱}$، زاویه خارجی برای مثلث OAM است:



$$\mathbf{\widehat{A}_۱ = \widehat{O}_۱ + \widehat{M} = ۲۰^\circ + ۲۰^\circ = ۴۰^\circ}$$

از طرف دیگر $\mathbf{OA = OB = R}$ و مثلث OAB متساوی‌الساقین است:

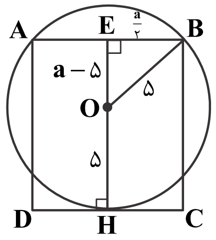
$$\mathbf{\widehat{A}_۱ = \widehat{B}_۱ = ۴۰^\circ}$$

در نهایت زاویه BON زاویه خارجی مثلث OBM است و

$$\mathbf{B\widehat{O}N = \widehat{M} + \widehat{B}_۱ = ۲۰^\circ + ۴۰^\circ = ۶۰^\circ}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ زوایای مرکزی و زاویه بین امتداد دو وتر)

۱۰- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم که در آن O مرکز دایره است و طول ضلع مربع را a فرض کرده‌ایم. OH عمود بر مماس CD است و امتداد آن بر ضلع AB مماس است واضح است $OH = OB = ۵$.



OE بر AB عمود است، پس OE، ضلع AB را نصف می‌کند و $BE = \frac{a}{۲}$.

اکنون در مثلث OBE، بنابر قضیه فیثاغورس:

$$OB^۲ = OE^۲ + BE^۲ \Rightarrow ۲۵ = (a-۵)^۲ + \frac{a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow ۲۵ = a^۲ - ۱۰a + ۲۵ + \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow ۰ = \frac{۵a^۲}{۴} - ۱۰a \Rightarrow a(\frac{۵}{۴}a - ۱۰) = ۰$$

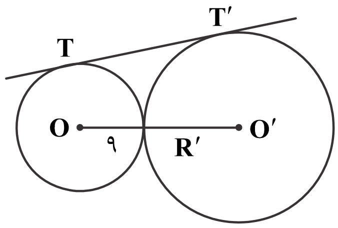
به‌دست می‌آید: $a = ۸$. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ وتر و مماس)

۱۱- گزینه «۱» ـ چون زاویه A برابر $۲۵°$ است، پس کمان BD برابر $۵۰°$ است. همچنین زاویه D برابر $۶۵° = ۲۵° - ۹۰°$ و در نهایت کمان AC برابر $۱۳۰°$ است. اکنون به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{۲} = \frac{۱۳۰° - ۵۰°}{۲} = ۴۰°$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ زاویه بین امتداد دو وتر)

۱۲- گزینه «۳» ـ دو دایره زمانی دارای سه مماس مشترک هستند که مماس خارج باشند و طول مماس مشترک خارجی برابر $۲\sqrt{RR'}$ است، پس:



$$۲\sqrt{۹ \times R'} = ۲۴ \Rightarrow R' = ۱۶$$

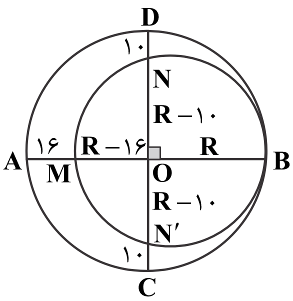
در نهایت به‌دست می‌آید:

$$OO' = ۹ + ۱۶ = ۲۵$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وضع دو دایره ـ طول مماس مشترک)

۱۳- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم که در آن R اندازه شعاع دایره بزرگ‌تر است. به‌دست می‌آید: $OM = R - ۱۶ , OB = R$

اکنون بنابر روابط طولی:



$$ON \times ON' = OM \times OB$$

$$(R-۱۰)^۲ = (R-۱۶) \times R \Rightarrow R^۲ - ۲۰R + ۱۰۰ = R^۲ - ۱۶R \Rightarrow ۴R = ۱۰۰$$

یعنی $R = ۲۵$. با فرض این‌که r شعاع دایره کوچک‌تر است، به‌دست می‌آید:

$$۲r = ۲R - ۱۶ = ۵۰ - ۱۶ = ۳۴ \Rightarrow r = ۱۷$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ روابط طولی)

۱۴- گزینه «۳» ـ می‌دانیم هر دو n ضلعی منتظم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر مربع نسبت طول اضلاع آن‌ها است. از طرف دیگر طول ضلع n ضلعی محاطی بر دایره $C(O , r)$ برابر $۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$ و طول ضلع n ضلعی محیط بر همین دایره برابر $۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$ است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با:

$$\left(\frac{۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}}{۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}}\right)^۲ = \cos(\frac{۱۸۰}{n})$$

در این مسأله $n = ۶$، پس نسبت مساحت‌ها برابر است با:

$$\cos^۲(\frac{۱۸۰}{۶}) = \cos^۲ ۳۰° = \frac{۳}{۴}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی)

۱۵- گزینه «۳» ـ می‌دانیم در یک ذوزنقه که هم محیطی و هم محاطی است، مساحت برابر حاصل‌ضرب میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها است. ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، محاطی است. خطی که وسط ساق‌های ذوزنقه را به هم وصل می‌کند برابر میانگین حسابی قاعده‌ها است. اکنون با کنار هم قرار دادن این گزاره‌ها به‌دست می‌آید:

$$S = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ چهارضلعی‌های محاطی و محیطی)