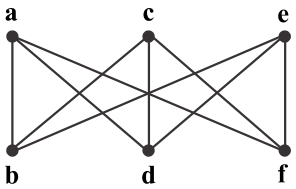
ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۴» ـ گراف داده شده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. چون گراف رأس با درجه $P-1=5$ ندارد، پس عدد احاطه‌گری نمی‌تواند ۱ باشد. با انتخاب یک رأس از رئوس a , c , e و یک رأس هم از رئوس $\{b , d , f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم به‌دست می‌آید. پس تعداد کل مجموعه‌های احاطه‌گر می‌نیمم برابر $۳\times۳=۹$ است.



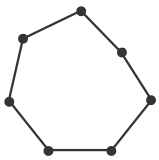
(هویدی) (پایه دوازدهم ـ ریاضیات گسسته ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ احاطه‌گر می‌نیمم)

۲- گزینه «۲» ـ چون گراف دارای عدد احاطه‌گری ۱ است پس دارای رأس است که به تمام رأس‌های دیگر متصل است. یعنی درجه آن رأس ۹ است و چون حداقل تعداد یال را دارد، پس فقط یال‌های متصل به این رأس را به‌عنوان یال‌های گراف در نظر می‌گیریم. بنابراین $\Delta=۹$ و $\delta=۱$. در نتیجه:

$$\Delta-\delta=۹-۱=۸$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ عدد احاطه‌گری)

۳- گزینه «۲» ـ گراف $C_۷$ یک ۷ ضلعی بدون قطر است و درجه هر رأس آن ۲ است. پس هر رأس دلخواه ۳ رأس را احاطه می‌کند. خودش و دو رأسی که به آن متصل شده‌اند.



(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ احاطه‌گری)

۴- گزینه «۳» ـ بین دو رأس a و b حتماً یکی باید در مجموعه احاطه‌گر باشد. هم‌چنین در بین رئوس c و d حتماً یکی باید در مجموعه احاطه‌گر باشد. می‌توان مجموعه‌های احاطه‌گر دوعضوی را به‌صورت زیر مشخص کرد:

$$\{a , c\} \qquad \{b , c\} \qquad \{b , d\}$$

پس این گراف دارای ۳ مجموعه احاطه‌گر دوعضوی است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ مجموعه احاطه‌گر)

۵- گزینه «۳» ـ به غیر از $\{a , e\}$، $\{b , c\}$ و $\{d , c\}$ بقیه زیرمجموعه‌های دوعضوی از مجموعه رئوس این گراف احاطه‌گر هستند. پس تعداد کل ۷− مجموعه‌ها برابر:

$$\binom{۵}{۲}-۳=۱۰-۳=۷$$

(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل دوم درس دم ۷− مجموعه)

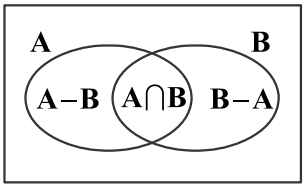
۶- گزینه «۳» ـ مجموعه $\{b , f\}$ یک احاطه‌گر می‌نیمم است. در بین گزینه‌های ۲ عضوی، در $\{e , g\}$ رأس a احاطه نمی‌شود و در $\{g , b\}$ رأس d احاطه نمی‌شود. (کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ مجموعه احاطه‌گر)

۷- گزینه «۲» ـ اگر A پیشامد این باشد که عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد و B پیشامد این باشد که عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، بنابر فرض مسأله باید $P(A-B)$ را به‌دست آوریم. فضای نمونه‌ای در این مسأله برابر مجموعه تمام داده‌های انتخاب یک عدد از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ است، پس $n(s)=۱۰۰$. در اعداد ۱ تا ۱۰۰، تعداد عددهای بخش‌پذیر بر ۲ برابر $[\frac{۱۰۰}{۲}]=۵۰$ و تعداد عددهایی که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر هستند برابر $\frac{۱۰۰}{۶}=۶$ است. اکنون به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۵۰}{۱۰۰}-\frac{۱۶}{۱۰۰}=\frac{۳۴}{۱۰۰}=۰/۳۴$$

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل دوم ـ درس اول ـ قوانین احتمال)

۸- گزینه «۳» ـ با توجه به شکل:



$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(A\cap B)+P(B-A)$$

یعنی:

$$۰/۹=۰/۴+P(A\cap B)+۰/۲$$

پس: $P(A\cap B)=۰/۳$.

اکنون به‌دست می‌آید:

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)=۰/۴+۰/۳=۰/۷$$

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل دوم ـ درس اول ـ قوانین احتمال)

۹- گزینه «۳» ـ می‌دانیم:

$$P(a)+P(b)+P(c)=1 \quad (1)$$

بنابر فرض:

$$P(b)+P(c)=\frac{K+3}{8},\ P(a)+P(b)=\frac{3K+1}{8}$$

این دو برابری را با هم جمع می‌کنیم:

$$P(b)+[P(a)+P(b)+P(c)]=\frac{K+1}{2} \xrightarrow{(1)} P(b)+1=\frac{K+1}{2} \Rightarrow P(b)=\frac{K-1}{2} \Rightarrow 0\le\frac{K-1}{2}\le 1 \Rightarrow 1\le K\le 3$$

اگر $K=1$ آن‌گاه $P(b)=0$، $P(a)=\frac{1}{8}$ و $P(c)=\frac{1}{2}$ (مورد قبول است.)

اگر $K=2$ آن‌گاه $P(b)=\frac{1}{2}$، $P(c)=\frac{1}{8}$ و $P(a)=\frac{3}{8}$ (مورد قبول است.)

اگر $K=3$ آن گاه $P(b)=1$، $P(c)<0$ (قابل قبول نیست.) (هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ احتمال غیر هم‌شانس)

۱۰- گزینه «۴» ـ بنابر رابطه احتمال شرطی می‌نویسیم:

$$P(B\mid A'\cup B')=\frac{P(B\cap(A'\cup B'))}{P(A'\cup B'}=\frac{P(B\cap A')}{P(A'\cup B')}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A\cap B)}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{9-4}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}$$

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ احتمال شرطی ـ رابطه اولیه)

۱۱- گزینه «۲» ـ فرض کنید A پیشامد قرمز بودن مهره خارج شده از جعبه اول و B پیشامد قرمز بودن مهره خارج شده از جعبه دوم باشد. در این صورت پیشامد غیر هم‌رنگ بودن دو مهره برابر $(A\cap B')\cup(A'\cap B)$ است. چون $A\cap B'$ و $A'\cap B$ ناسازگارند. پس:

$$P((A\cap B')\cup(A'\cap B)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)P(B'\mid A)+P(A')P(B\mid A')$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}=0/36$$

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ قانون ضرب احتمال)

۱۲- گزینه «۲» ـ فرض کنید Y پیشامد این باشد که محصول انتخاب شده از خط تولید A باشد و بالطبع Y' پیشامد این است که محصول انتخاب شده از خط تولید B باشد. همچنین فرض کنید X پیشامد نیاز به کنترل داشتن محصول انتخابی باشد در این صورت طبق قانون احتمال کل:

$$P(X)=P(Y)P(X\mid Y)+P(Y')P(X\mid Y')=0/45\times 0/3+0/55\times 0/4=0/135+0/22=0/355$$

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ قانون احتمال کل)

۱۳- گزینه «۳» ـ فرض کنید A پیشامد دریافت نقطه و B پیشامد مخابره نقطه باشد. در این صورت B' پیشامد مخابره خط است. باید $P(B\mid A)$ را حساب کنیم. چون B و B' فضای نمونه‌ای را افراز می‌کند، پس طبق قانون بیز:

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(B')P(A\mid B')}=\frac{0/4\times(1-\frac{1}{5})}{0/4\times(1-\frac{1}{5})+0/6\times\frac{2}{3}}=\frac{4}{9}$$

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ قانون بیز)

۱۴- گزینه «۳» ـ اگر A و B به‌ترتیب پیشامد آن باشد که اولین و دومین دانشجو از کتابخانه استفاده کند، در این صورت احتمال این‌که حداقل یکی از آن‌ها از کتابخانه استفاده کند برابر $P(A\cup B)$ است. طبق فرض $P(A)=P(B)-0/6$. دقت کنید که A و B مستقل هستند:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/6+0/6-0/36=0/84$$

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل دوم ـ درس چهارم ـ پیشامدهای مستقل و وابسته)