

ریاضی و آمار ۲

۱- گزینه «۲» - به تابعی چند ضابطه‌ای که همه ضابطه‌هایش عدد ثابت باشند تابع پلکانی می‌گویند. بنابراین در تابع پلکانی همه ضابطه‌ها عدد ثابت می‌باشند. در تابع داده شده برای اینکه ضابط اول نیز عدد ثابت باشد باید ضریب X صفر شود تا قسمت متغیر از بین برود:
 $-a + 4 = 0 \Rightarrow a = 4$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۲ - تابع پلکانی) (متوسط)

۲- گزینه «۱» - $\text{sign}(x)$ تابع علامت می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

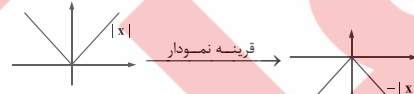
تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ را تابع جزء صحیح می‌نامیم. این تابع به همه اعداد بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ عدد k را نسبت می‌دهد و به عدد صحیح k هم، خودش یعنی k را نسبت می‌دهد.

$$f(x) = \text{sign}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - 3\right) \xrightarrow{x=1/\sqrt{2}} f(1/\sqrt{2}) =$$

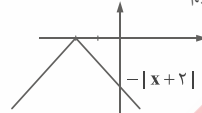
$$\text{sign}\left(\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 3\right) = \text{sign}(-2/\sqrt{2}) = \text{sign}(-\sqrt{2}) = -1$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۲ - تابع جزء صحیح - تابع علامت) (متوسط)

۳- گزینه «۴» - نمودار تابع قدرمطلق، $f(x) = |x|$ به صورت زیر می‌باشد:

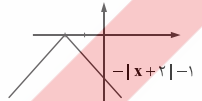


چون دامنه نمودار داده شده از $X = -2$ می‌باشد، بنابراین داریم:



همچنین نمودار داده شده به اندازه -1 واحد به سمت پایین محور Y است.

* نکته: نمودار $f(x) = |x+a| - b$ از انتقال $f(x) = |x|$ به اندازه a واحد به چپ و b واحد به پایین به دست می‌آید:



* روش دوم: با استفاده از نقطه پایانی و به دست آوردن تابع همانی خطی. (سراسری - ۹۸ با تغییر) (فصل دوم - درس ۲ - تابع قدرمطلق) (متوسط)

۴- گزینه «۱» -

$$D_f = \{-1, 2\}, D_g = \{2, -1\}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{-1, 2\} \Rightarrow (f \times g)(-1) = f(-1) \times g(-1) = 2 \times 1 = 2$$

$$(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 3 \times (-2) = -6 \Rightarrow f \times g = \{(-1, 2), (2, -6)\}$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (آسان)

۵- گزینه «۳» -

$$f = \{(x, x^3) \mid x = \pm 4, \dots, \pm 1, 0\} \Rightarrow f(x) = x^3$$

$$D_f = \{-4, -3, \dots, 0, 1, 2, \dots, 4\}$$

$$g = \{(x, -x^4) \mid x = \pm 4, \dots, \pm 1, 0\} \Rightarrow g(x) = -x^4$$

$$D_g = \{-4, -3, \dots, 0, 1, 2, \dots, 4\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\} = \{\pm 4, \pm 2, \pm 1\}$$

$$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{-x^4}{x^3} = -x$$

چون $\frac{g}{f}$ برابر $-x$ می‌باشد (قرینه تابع همانی)، بنابراین به ازای x های منفی، خروجی مثبت و به ازای x های مثبت، خروجی منفی را می‌دهد و چون دامنه $\frac{g}{f}$ ۸ عضو دارد، بنابراین برد آن نیز شامل ۸ عضو است.

(سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰ با تغییر) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (دشوار)

۶- گزینه «۱» -

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow (g-f)(-3) = g(-3) - f(-3) \Rightarrow$$

$$g(-3) = -2(-3) - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$f(-3) = \sqrt{-(-3)} + 6 = \sqrt{3} + 6 = 3 \Rightarrow (g-f)(-3) = 2 - 3 = -1$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (آسان)

۷- گزینه «۲» -

$$D_f = \{-1, 2, 3\}, D_g = \{3, -1, -2\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-1, 3\} \Rightarrow (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 0 + (-2) = -2$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = -4 + 2 = -2 \Rightarrow R_{f+g} = \{-2\}$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (متوسط)

۸- گزینه «۴» -

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$D_f : -1 \leq x < 4$$

$$D_g : x \leq 2$$

$$D_{f-g} : -1 \leq x \leq 2$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (متوسط)

۹- گزینه «۲» -

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}, D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{1, -3\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{1, -3\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x-4}{x+3}$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» -

$$D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{3, -2, 2\}$$

تابع همانی $g(x) = x$

$$g = \{(3, 3), (-2, -2), (2, 2)\} \Rightarrow f \times g = \{(3, -3), (-2, -2), (2, 8)\}$$

$$f \times g = \{(3, -3), (2, -2b), (a, -2)\} \Rightarrow -2b = 8 \Rightarrow b = -4$$

$$a = -2 \Rightarrow a - b = -2 - (-4) = 2$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (متوسط)