ریاضی ۲

۱- گزینه «۱» ـ رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع دایره مساوی است.

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی)

۲- گزینه «۲» ـ

$$\sin(۵\pi+\alpha)=\sin(۴\pi+(\pi+\alpha))=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\ \sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha\ ,\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\frac{\sin(۵\pi+\alpha)-A\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)+۲\sin(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha+A\sin\alpha}{\cos\alpha-۲\sin\alpha}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\ \cancel{-۲\sin\alpha}+۲A\sin\alpha=\cos\alpha\cancel{-۲\sin\alpha}\ \Rightarrow\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۱}{۲A}$$

$$\Rightarrow\ \tan\alpha=\frac{۱}{۲A}$$

$$\frac{۵}{۲}=\frac{۱}{۲A}\ \Rightarrow\ A=\frac{۱}{۵}$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی)

۳- گزینه «۱» ـ می‌دانیم:

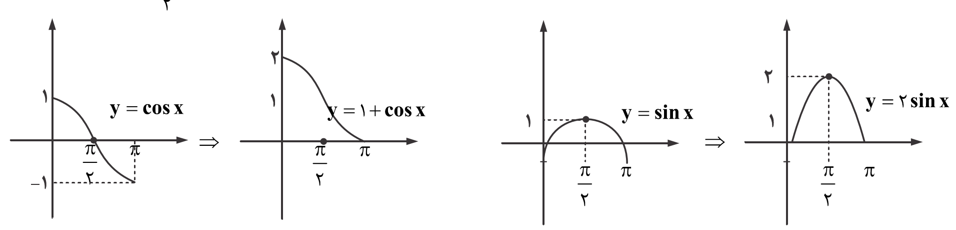
$$\cot(x+\frac{\pi}{۱۰})=\tan(\frac{\pi}{۲}-x-\frac{\pi}{۱۰})=\tan(\frac{۴\pi}{۱۰}-x)=\tan(\frac{۲\pi}{۵}-x)\ \Rightarrow\ \tan(x+\frac{۳\pi}{۲۰})=\tan(\frac{۲\pi}{۵}-x)\ \Rightarrow\ x+\frac{۳\pi}{۲۰}=\frac{۲\pi}{۵}-x$$

$$۲x=\frac{۲\pi}{۵}-\frac{۳\pi}{۲۰}\ \Rightarrow\ ۲x=\frac{۵\pi}{۲۰}\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{۸}$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم)

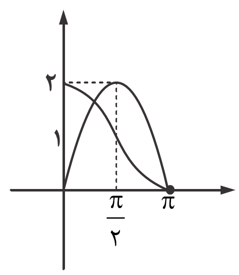
۴- گزینه «۳» ـ دو نمودار را رسم می‌کنیم:

$۱)\ y=۱+\sin(x+\frac{\pi}{۲})=۱+\cos(x)$ $\qquad$ $۲)\ y=-۲\sin(\pi+x)=۲\sin(x)$



دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

این دو نمودار در نقطه $x=\pi$ و یک نقطه بین $(\circ\,,\frac{\pi}{۲})$ تقاطع دارند.



(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ توابع مثلثاتی)

۵- گزینه «۴» ـ

۱) نمودار $\sqrt{x}$ را، ۳ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم: $\quad f(x)=\sqrt{x-۳}$

۲) ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهیم: $\quad f(x)=\sqrt{x-۳}+۱$

۳) عرض تمام نقاط را نصف می‌کنیم: $\quad f(x)=\frac{۱}{۲}(\sqrt{x-۳}+۱)$

۴) نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم: $\quad f(x)=\frac{-۱}{۲}\sqrt{x-۳}-\frac{۱}{۲}$

(الله‌دادی) (فصل سوم ـ رسم نمودار توابع به کمک انتقال)

۶- گزینه «۱» ـ چون $\cot\alpha<\circ$ بنابراین $\tan\alpha<\circ$، چون داریـم: $\sin\alpha\tan\alpha<\circ$ بنـابراین $\sin\alpha>\circ$، بنـابراین α در ناحیـه دوم قـرار دارد و $\cos\alpha<\circ$.

$$\cot\alpha=\frac{-۳}{۴}\ \Rightarrow\ ۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\ \Rightarrow\ \sin^۲\alpha=\frac{۱}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=-\frac{۳}{۵}\ \Rightarrow\ -۰/۶$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع)

۷- گزینه «۴» ـ

$$f(0)=\frac{3}{2} \Rightarrow b-a\sin(\frac{\pi}{2})=b-a=\frac{3}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{2})=1 \Rightarrow b-a\sin(0)=b=1 \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$$

$$a+b=\frac{1}{2}$$

(اللهدادی) (فصل چهارم ـ رسم تابع سینوس و کسینوس)

۸- گزینه «۱» ـ روش اول: ناحیه اول بین صفر تا $\frac{\pi}{2}$ رادیان قرار دارد و می‌دانیم: $\frac{\pi}{2} > \frac{5\pi}{18} > 0$، بنابراین این زاویه در ناحیه اول قرار دارد.

روش دوم:

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi} \xrightarrow{R=\frac{5\pi}{18}} \frac{D}{180^\circ}=\frac{\frac{5\pi}{18}}{\pi} \Rightarrow D=50^\circ$$

ناحیه اول از صفر تا ۹۰ درجه تعریف می‌شود، پس این زاویه درناحیه اول است. (گروه مؤلفان علـوی) (فصل چهارم ـ مثلثات)

۹- گزینه «۱» ـ

$$\text{محیط حوض} = 2\pi r = 2\pi\times 10 = 20\pi$$

$$L=\frac{7}{20}\times 20\pi = 7\pi \Rightarrow \alpha=\frac{L}{R} \Rightarrow \alpha=\frac{7\pi}{10}$$

$$\frac{7\pi}{10}\text{rad}\times\frac{2000}{1\,\text{rad}}=1400\pi \simeq 4200$$

(اللهدادی) (فصل چهارم ـ طول کمان روبه‌روی زاویه)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$\sin(79^\circ)=\sin(90^\circ-11^\circ)=\cos(11^\circ)\,,\ \cos(169^\circ)=\cos(180^\circ-11^\circ)=-\cos(11^\circ)$$

$$\tan(731^\circ)=\tan(2\times 360^\circ+11^\circ)=\tan(11^\circ)$$

$$\sqrt{1+\tan^2 371^\circ}=\sqrt{1+\tan^2(360^\circ+11^\circ)}=\frac{1}{|\cos(11^\circ)|}$$

$$\sqrt{1+\cot^2(169^\circ)}=\sqrt{1+\cot^2(180^\circ-11^\circ)}=\frac{1}{|\sin(11^\circ)|}$$

$$\frac{\sin(79^\circ)+\cos(169^\circ)+\sqrt{1+\tan^2(371^\circ)}\times\sqrt{1+\cot^2(169^\circ)}}{\tan(731^\circ)+\cot(11^\circ)}=\frac{\cos(11^\circ)-\cos(11^\circ)+\frac{1}{|\cos(11^\circ)|}\times\frac{1}{|\sin(11^\circ)|}}{\tan(11^\circ)+\cot(11^\circ)}=$$

$$\frac{\frac{1}{|\cos(11^\circ)\sin(11^\circ)|}}{\frac{\sin(11^\circ)}{\cos(11^\circ)}+\frac{\cos(11^\circ)}{\sin(11^\circ)}}=\frac{\frac{1}{\cos(11^\circ)\sin(11^\circ)}}{\frac{\sin^2(11^\circ)+\cos^2(11^\circ)}{\sin(11^\circ)\cos(11^\circ)}}=1$$

(اللهدادی) (فصل چهارم ـ روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی)

۱۱- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & x\ge 1\\ 2x+1 & x\le 1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}3x+1 & x\ge -1\\ 2x & x\le -1\end{cases}$$

$$(f-g)(-3)=f(-3)-g(-3)=-5-(-6)=1$$

$$(\frac{f}{g})(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{1}{1}=1$$

(اللهدادی) (فصل سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۱۲- گزینه «۲» ـ

$$\cos(-\frac{7\pi}{3})=\cos(-2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos(-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$$

$$\tan(405^\circ)=\tan(360^\circ+45^\circ)=\tan(45^\circ)=1$$

$$\sin(\frac{4\pi}{3})=\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sin(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A=\cos(-\frac{7\pi}{3})-\tan(405^\circ)+\sin(\frac{4\pi}{3})=\frac{1}{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A^2=(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(اللهدادی) (فصل چهارم ـ روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی)

۱۳- گزینه «۴» ـ

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\sin\theta\ ,\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta\ ,\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta\ ,\ \sin(۳\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}\xrightarrow[\sin\theta=۰/۲\cos\theta]{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=۰/۲}\frac{۰/۲\cos\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}=\frac{۱/۲\cancel{\cos\theta}}{۲\times۰/۲\cancel{\cos\theta}}=۳$$

(سراسری ریاضی ـ ۹۱ با تغییر) (فصل چهارم ـ روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی)

۱۴- گزینه «۳» ـ اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$ باشد، آن‌گاه $\tan\alpha\cdot\tan\beta=۱$ خواهد بود، (زیرا $\alpha=\frac{\pi}{۲}-\beta$ حال از طرفین تانژانت بگیرید)، در این سؤال:

$۱^\circ+۸۹^\circ=۹۰^\circ\ \Rightarrow\ \tan۱^\circ\times\tan۸۹^\circ=۱$

$۲^\circ+۸۸^\circ=۹۰^\circ\ \Rightarrow\ \tan۲^\circ\times\tan۸۸^\circ=۱$

$۳^\circ+۸۷^\circ=۹۰^\circ\ \Rightarrow\ \tan۳^\circ\times\tan۸۷^\circ=۱$

$\vdots$

$۴۵^\circ\ \Rightarrow\ \tan۴۵^\circ=۱$

بنابراین: $A=(\tan۱^\circ\tan۸۹^\circ)\cdot(\tan۲^\circ\tan۸۸^\circ)\cdot(\tan۳^\circ\tan۸۷^\circ)\cdots\tan۴۵^\circ$

(آزاد ریاضی ـ ۷۲) (فصل چهارم ـ نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم)

۱۵- گزینه «۲» ـ

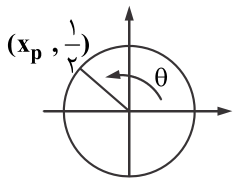
$x=\frac{\pi}{۲}\ ,\ y=۲\ \Rightarrow\ (\frac{\pi}{۲},۲)\ \Rightarrow\ y=۳a+۲b\sin x\ \Rightarrow\ ۲=۳a+۲b\sin(\frac{\pi}{۲})\ \Rightarrow\ ۲=۳a+۲b$

$(\pi,\circ)\ \Rightarrow\ \circ=۳a+۲b\sin(\pi)\ \Rightarrow\ ۳a=\circ\ \Rightarrow\ a=\circ$

$۲=۳a+۲b\ \Rightarrow\ ۲=۲b\ \Rightarrow\ b=۱\ ,\ a+b=\circ+۱=۱$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ رسم نمودار تابع سینوس)

۱۶- گزینه «۳» ـ



$$\begin{cases}x_p=\cos\theta\\ y_p=\sin\theta\end{cases}$$

$$x_p^۲+y_p^۲=۱\ \Rightarrow\ x_p^۲=۱-y_p^۲\ \Rightarrow\ x_p^۲=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{ربع دوم}}x_p=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\theta=\frac{y_p}{x_p}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{-\sqrt{۳}}{۳}\ \Rightarrow\ \tan^۲\theta=\frac{۱}{۳}$$

$$A=\sin\theta+\tan^۲\theta=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}$$

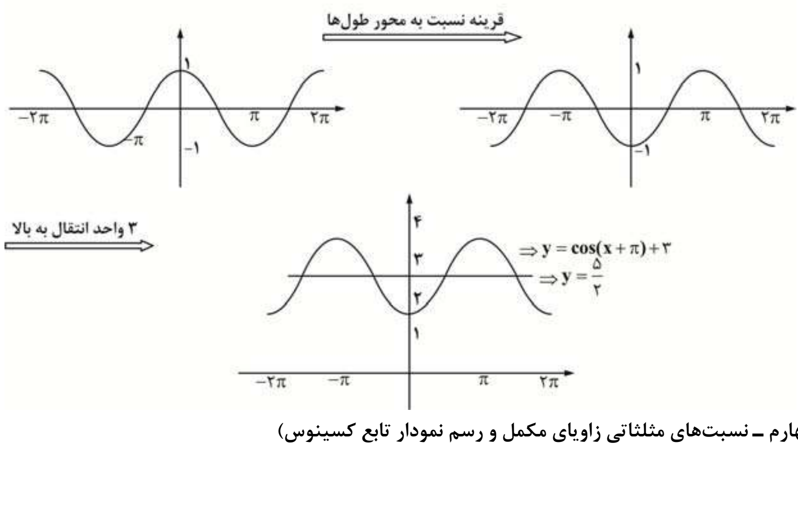
(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$$A+B+C=\pi\ \Rightarrow\ \frac{A}{۲}+\frac{B}{۲}+\frac{C}{۲}=\frac{\pi}{۲}\ \Rightarrow\ \frac{A}{۲}+\frac{B}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{C}{۲}\ \Rightarrow\ \sin(\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲})=\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{C}{۲})\ \Rightarrow\ \sin(\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲})=\cos(\frac{C}{۲})$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ نسبت‌های مثلثاتی زاویای متمم)

۱۸- گزینه «۱» ـ نمودار تابع $y=\cos(x+\pi)+۳$ را ابتدا تبدیل به $y=-\cos(x)+۳$ می‌کنیم و حال این نمودار را رسم می‌کنیم.



دو نمودار در چهار نقطه تلاقی دارند. (الله‌دادی) (فصل چهارم ـ نسبت‌های مثلثاتی زاویای مکمل و رسم نمودار تابع کسینوس)

۱۹- گزینه «۱» ـ

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} \Rightarrow \cot\alpha\tan\alpha = ۱$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \cot\alpha \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)\tan\alpha = ۱$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$B + ۳۰^\circ + C + ۳۰^\circ = ۹۰ \Rightarrow B + C = ۳۰^\circ$$

$$A + B + C = ۱۸۰ \Rightarrow A = ۱۵۰^\circ$$

(اللهدادی) (فصل چهارم ـ نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم)

۲۰- گزینه «۳» ـ رسم نمودار تابع کسینوس به کمک انتقال

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \cos(x-\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow f(x) = ۲\cos(x-\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow f(x) = -۲\cos(x-\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow ۲-۲\cos(x-\frac{\pi}{۲})$$

$$f(x) = ۲-۲\cos(x-\frac{\pi}{۲}) = ۲-۲\cos(-(\frac{\pi}{۲}-x)) = ۲-۲\cos(\frac{\pi}{۲}-x) \Rightarrow ۲-۲\sin(x)$$

(اللهدادی) (فصل چهارم ـ توابع مثلثاتی)