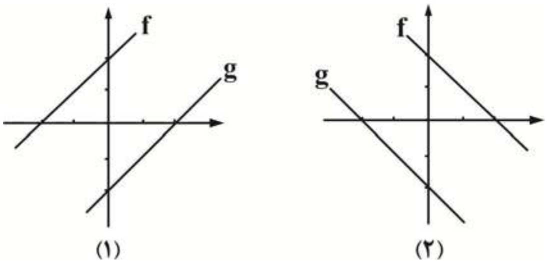
## ریاضی ۲

**۱- گزینه «۱» ـ نمودار تابع داده شده $fg = x^2 - 4$ است.**




$$fg = (x^2 - 4) = \begin{cases} (x-2)(x+2) & (1) \\ (-x-2)(-x+2) & (2) \end{cases}$$

(جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ ضرب توابع)

**۲- گزینه «۱» ـ فقط در مورد «پ»، به‌ازای همه مقادیر x، تمام مقادیر f و g قرینه یکدیگر هستند.** (جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ مجموع توابع)

**۳- گزینه «۴» ـ**

$$\frac{f^3 - g^3}{f-g} = \frac{(f-g)(f^2+g^2+fg)}{f-g} = g^2 + f^2 + fg = 9 + 6\sqrt{x} + x + 9 - 6\sqrt{x} + x + 9 - x = x + 27$$

$$D_y = D_f \cap D_g - \{x \mid (f-g)(x) = 0\} = (0, +\infty)$$

(جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

**۴- گزینه «۳» ـ**

$fg > 0 \Rightarrow$

| x | $-\infty$ تا $-2$ | $-2$ تا $-1$ | $-1$ تا $0$ | $0$ تا $1$ | $1$ تا $2$ | $2$ تا $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f | + | − | ▨ | + | + | − |
| g | − | − | + | + | − | ▨ |
| fg | − | + ج | ▨ | + ج | − | ▨ |

$\Rightarrow D_y = (-2, -1) \cup [0, 1)$

(جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

**۵- گزینه «۲» ـ**

$$\begin{aligned} D_f &= [-2, 2] \\ D_g &= [1, +\infty) \end{aligned} \Rightarrow D_{\frac{f^2}{g^2}} \Rightarrow D_f \cap D_g - \{x \mid g^2(x) = 0\} = \{2\}$$

$$\Rightarrow \frac{f^2}{g^2}(2) = \frac{4 - 2^2}{[2] - 1} = \frac{0}{1} = 0$$

بنابراین نقطه $(2, 0)$ تنها عضو تابع $\frac{f^2}{g^2}$ است. (جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

**۶- گزینه «۱» ـ**

$$D_{f \cap g} = \{0, 1\}$$

$$\begin{cases} f^3(1) = 4^3 = 64 \\ g^2(1) = \sin^2 \pi = 0 \end{cases} \Rightarrow (f^3 - g^2)(1) = 64, \begin{cases} f^3(0) = 3^3 = 27 \\ g^2(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow (f^3 - g^2)(0) = 27 - 1 = 26 \Rightarrow |64 - 26| = 38$$

(جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

**۷- گزینه «۳» ـ با توجه به شکل نمودار f ضابطه آن برابر است با:**

$$f(x) = [x]$$

$$\xrightarrow{0 \le x < 1} [x] = 0 \Rightarrow (f+g)(x) = g(x)$$

از طرف دیگر ضابطه $(f+g)(x)$ در بازه $0 \le x < 1$ به‌صورت $(f+g)(x) = 2x$ می‌باشد. بنابراین $g(x) = 2x$ است.

(جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۸- گزینه «۴» ـ با توجه به این‌که $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$، پس می‌توان منفی اعداد داده شده را در نظر نگرفت. حال داریم:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{۲} < ۲/۵ < \pi \Rightarrow -۱ < \cos ۲/۵ < ۰ \\ \frac{\pi}{۲} < ۳ < \pi \Rightarrow -۱ < \cos ۳ < ۰ \end{cases}$$

۲/۵ و ۳ رادیان هر دو در ربع دوم هستند و هر چه از $\frac{\pi}{۲}$ به $\pi$ نزدیک‌تر می‌شویم، مقدار $\cos$ کمتر می‌شود. پس $\cos ۳ < \cos ۲/۵$.

$$\frac{۳\pi}{۲} < ۵ < ۲\pi \Rightarrow ۰ < \cos ۵ < ۱$$

$$\frac{۳\pi}{۲} < ۶ < ۲\pi \Rightarrow ۰ < \cos ۶ < ۱$$

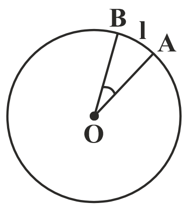
۵ و ۶ رادیان هر دو در ربع چهارم هستند و هر چه از $\frac{۳\pi}{۲}$ به $۲\pi$ نزدیک‌تر می‌شویم، مقدار $\cos$ بیشتر می‌شود. پس $\cos ۵ < \cos ۶$.

در نتیجه:

$$\cos ۳ < \cos ۲/۵ < \cos ۵ < \cos ۶ \Rightarrow \cos(-۳) < \cos(-۲/۵) < \cos(-۵) < \cos(-۶)$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس اول و دوم ـ واحدهای اندازه‌گیری زاویه، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه)

۹- گزینه «۲» ـ




$$A\hat{O}B = ۴۰° - ۲۰° = ۲۰°$$

$$A\hat{O}B = \frac{۲۰° \times ۳/۱۴}{۱۸۰°} = ۰/۳۴ \text{ رادیان}$$

$$l = r\theta = ۶۴۰۰ \times ۰/۳۴ = ۲۱۷۶$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس اول ـ واحدهای اندازه‌گیری زاویه)

۱۰- گزینه «۱» ـ

$$\frac{R}{۱۰°} = \frac{\pi}{۱۸۰°} \Rightarrow R = ۰/۱۷ \text{ رادیان}$$

$$A\hat{O}C = ۶/۲۸ - ۲ - ۰/۱۷ = ۴/۱۱ \text{ رادیان} \Rightarrow A\hat{O}C - A\hat{O}B = ۴/۱۱ - ۲ = ۲/۱۱ \text{ رادیان} \Rightarrow$$

$$y - x = ۲ \times ۲/۱۱ = ۴/۲۲ \text{ سانتی‌متر}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس اول ـ واحدهای اندازه‌گیری زاویه)

۱۱- گزینه «۳» ـ

$$\begin{aligned} &۴ \text{ رادیان} = ۲۲۹/۲۹° \\ &\text{زاویه هر قسمت} = \frac{۳۶۰}{۱۶} = ۲۲/۵° \end{aligned} \Rightarrow \frac{۲۲۹/۲۹°}{۲۲/۵°} = ۱۰/۱۹$$

از آن‌جا که زاویه داده شده منفی است، از نقطه $A$ در جهت عقربه‌های ساعت شروع به حرکت کرده و ۱۰ قسمت را طی کرده و بین $G$ و $F$ و نزدیک‌تر به $G$ توقف می‌کنیم. (جعفری) (فصل چهارم ـ درس اول ـ واحدهای اندازه‌گیری)

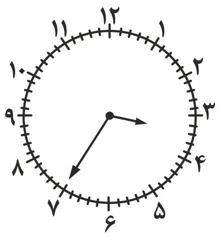
۱۲- گزینه «۴» ـ

$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲} r \times r \times \sin\theta = \frac{۱}{۲} r^۲ \sin\theta \,,\ S_{\text{دایره}} = \pi r^۲$$

$$\frac{S_{AOB}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{۱}{۴\pi} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲} r^۲ \sin\theta}{\pi r^۲} = \frac{۱}{۴\pi} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow r = \frac{l}{\theta} = \frac{\frac{\pi}{۲۴}}{\frac{\pi}{۶}} = \frac{۱}{۴}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس اول ـ واحدهای اندازه‌گیری زاویه)

۱۳- گزینه «۲» ـ ابتدا زاویه بین هر دو خط نشانه متوالی را در ساعت به‌دست می‌آوریم:




$$\text{زاویه بین هر دو خط} = \frac{۳۶۰^\circ}{۶۰} = ۶^\circ$$

به شرط ثابت ماندن عقربه کوچک، زاویه بین دو عقربه کوچک و بزرگ برابر است با:

$$\underbrace{۲۰}_{\text{دقیقه}} \times ۶^\circ = ۱۲۰^\circ$$

اما باید توجه داشت که وقتی عقربه بزرگ جابجا می‌شود، عقربه کوچک نیز حرکت کرده و به جلو می‌آید. برای به‌دست آوردن میزان جابجایی داریم:

وقتی عقربه بزرگ یک دور کامل را می‌زند ($۳۶۰^\circ$)، عقربه کوچک به اندازه ۵ خط نشانه حرکت می‌کند ($۵\times ۶^\circ$).

$$\frac{۶\times ۶۰^\circ}{۵\times ۶^\circ} = \frac{۳۵\times ۶}{x} \Rightarrow x = \frac{۳۵}{۲} = ۱۷/۵^\circ$$

بنابراین زاویه بین دو عقربه برابر است با: $۱۲۰^\circ - ۱۷/۵^\circ = ۱۰۲/۵^\circ$. (جعفری) (فصل چهارم ـ درس اول ـ واحدهای اندازه‌گیری زاویه)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$\left.\begin{array}{l} \sin ۸۳۵^\circ = \sin(\underbrace{۳\times ۲۷۰^\circ + ۲۵}_{\text{ناحیه دوم}}) = \cos ۲۵^\circ \\ \cos ۷۷۲^\circ = \cos(\underbrace{۴\times ۱۸۰^\circ + ۵۲^\circ}_{\text{ناحیه اول}}) = \cos ۵۲^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \cos ۵۲^\circ < \cos ۲۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos ۱۳۳۵^\circ = \cos(\underbrace{۵\times ۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ}_{\text{ناحیه سوم}}) = -\sin ۱۵^\circ \\ \sin ۱۰۴۸^\circ = \sin(\underbrace{۳\times ۳۶۰ - ۳۲}_{\text{ناحیه چهارم}}) = -\sin ۳۲^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sin}۱۵^\circ < \text{Sin}۳۲^\circ \Rightarrow -\text{Sin}۳۲^\circ < -\text{Sin}۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow \underset{\sin ۱۰۴۸^\circ}{\underset{\downarrow}{-\sin ۳۲^\circ}} < \underset{\cos ۱۳۳۵^\circ}{\underset{\downarrow}{-\sin ۱۵^\circ}} < \underset{\cos ۷۷۲^\circ}{\underset{\downarrow}{\cos ۵۲^\circ}} < \underset{\sin ۸۳۵^\circ}{\underset{\downarrow}{\cos ۲۵^\circ}}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی متمم و $۲k\pi$ رادیان)

۱۵- گزینه «۲» ـ

$$\sin ۷۷۷^\circ = \sin(۳\times ۲۷۰^\circ - ۳۳^\circ) = \cos ۳۳^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۳^\circ$$

$$\tan ۳۴۸^\circ = \tan(۳۶۰^\circ - ۱۲^\circ) = -\tan(۱۲^\circ) \Rightarrow \beta = ۱۲^\circ$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(۳۳^\circ + ۱۲^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی متمم و $۲k\pi$ رادیان)

۱۶- گزینه «۳» ـ

$$\alpha + \frac{\pi}{۸} + \beta + \frac{\pi}{۲۴} = \pi \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{۵\pi}{۶} \qquad \tan(\alpha+\beta) = \tan\frac{۵\pi}{۶} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی مکمل)

۱۷- گزینه «۲» ـ

$$\tan ۱۰۹۱^\circ = \tan(۶\times ۱۸۰^\circ + ۱۱^\circ) = \tan ۱۱^\circ$$

$$\tan ۲۸۱^\circ = \tan(۲۷۰^\circ + ۱۱) = -\cot ۱۱^\circ$$

$$\sin ۲۰۲^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۲۲^\circ) = -\sin ۲۲^\circ$$

$$\tan ۲۸۱^\circ + \tan ۱۰۹۱^\circ \simeq -۵ \Rightarrow \tan ۱۱^\circ - \cot ۱۱^\circ \simeq -۵$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \tan^۲ ۱۱^\circ + \cot^۲ ۱۱^\circ - ۲\underbrace{\tan ۱۱^\circ \cot ۱۱^\circ}_{۱} \simeq ۲۵ \Rightarrow \tan^۲ ۱۱^\circ + \cot^۲ ۱۱^\circ \simeq ۲۷$$

با توجه به رابطه $۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ و $۱+\cot^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x}$، داریم:

$$۲ + \tan^۲ ۱۱^\circ + \cot^۲ ۱۱^\circ = \frac{۱}{\sin^۲ ۱۱^\circ \cos^۲ ۱۱^\circ} = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲۲^\circ}$$

$$\Rightarrow ۲۹ \simeq \frac{۱}{\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲۲^\circ} \Rightarrow \sin^۲ ۲۲^\circ \simeq \frac{۴}{۲۹} \Rightarrow \sin ۲۲^\circ \simeq \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} \Rightarrow \sin ۲۰۲^\circ \simeq -\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی متمم و $۲k\pi$ رادیان)

۱۸- گزینه «۱» ـ

$$\sin(\frac{9\pi}{2}-x)=\cos x \text{ و } \sin(6\pi+x)=\sin x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{3}$$

طبق رابطه $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$، داریم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی متمم و $2k\pi$ رادیان)

۱۹- گزینه «۳» ـ

$$\tan\underline{1}^\circ+\tan\underline{\underline{2}}^\circ+\cdots+\tan 88^\circ+\tan 89^\circ+\tan 91^\circ+\tan 92^\circ+\cdots+\tan 178^\circ+\tan 179^\circ+\underbrace{\tan 180^\circ}_{0}$$

همان‌طور که می‌بینیم اعدادی که زیرشان خط کشیدیم، دو به دو مکمل هم هستند، بنابراین مجموع کسینوس آن‌ها صفر می‌شود. بـه همـین ترتیب حاصل کل عبارت سمت چپ تساوی صفر است.

از طرف دیگر:

$$\sin(-165^\circ)=-\sin 165^\circ=-\sin(180^\circ-15^\circ)=-\sin 15^\circ$$

$$\sin 570^\circ=\sin(3\times 180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$0=-\sin 15^\circ-\frac{1}{2}+\frac{3}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ=\frac{1}{4} \xrightarrow{1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}} \cot^2 15^\circ=15 \Rightarrow \cot 15^\circ=\sqrt{15}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی مکمل و قرینه)

۲۰- گزینه «۴» ـ از رابطه $\tan x\tan y=1$ می‌توان نتیجه گرفت $x+y=\frac{\pi}{2}$، بنابراین $\sin x=\cos y$. (جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی متمم)