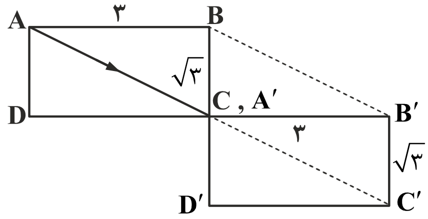
هندسه ۲



۱- گزینه «۳» ـ انتقال طول‌پاست و شیب‌خط و اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند، بنابراین:

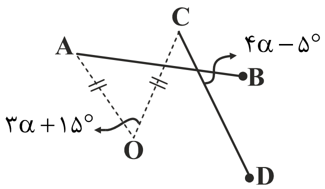
$$A'B' = AB = ۳\ ,\ B'C' = BC = \sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{A'B'B} : \tan(\widehat{CBB'}) = \frac{A'B'}{BC} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳} \Rightarrow \widehat{CBB'} = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{A'B'C'} : \tan(\widehat{C'A'B'}) = \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \widehat{C'A'B'} = ۳۰^\circ$$

$$\frac{\widehat{ABB'}}{\widehat{C'A'B'}} = \frac{۹۰^\circ + ۶۰^\circ}{۳۰^\circ} = \frac{۱۵۰^\circ}{۳۰^\circ} = ۵$$

(علوی) (تبدیل‌های هندسی ـ انتقال) (متوسط)



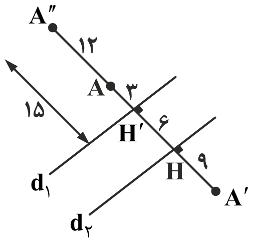
۲- گزینه «۱» ـ نقطه A با دوران به نقطه C تبدیل شـده، پس $\widehat{AOC} = ۳\alpha + ۱۵^\circ$ زاویـه دوران اسـت. پاره‌خط AB با دوران به پاره‌خط CD تبدیل شده، پس $۴\alpha - ۵^\circ$ زاویه دوران است، بنابراین:

$$۳\alpha + ۱۵^\circ = ۴\alpha - ۵^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ$$

(علوی) (تبدیل‌های هندسی ـ دوران) (آسان)

۳- گزینه «۲» ـ می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به محورهای بازتاب موازی معادل یک انتقال است با طول بردار دو برابـر فاصلـه بـین دو محور بازتاب، بنابراین داریم:



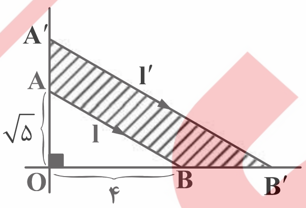
$$AA'' = ۲HH' = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

(علوی) (تبدیل‌های هندسی ـ ترکیب تبدیل‌ها) (متوسط)

۴- گزینه «۴» ـ همه عبارت‌ها درست هستند، به توضیحات زیر دقت کنید:

تبدیل همانی تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را بر خود آن نظیر نماید. به این ترتیب طول پاره‌خط‌ها تغییر نمی‌کند، زیرا هـر پـاره‌خـط بـر خودش منطبق است. همچنین همه نقاط صفحه نقاط ثابت تبدیل هستند، زیرا جابه‌جا نمی‌شوند، پس تبدیل همانی بی‌شمار نقطه ثابت تبـدیل دارد. دوران با زاویه ۳۶۰° و تجانس با نسبت $k = ۱$ تبدیل همانی هستند. در انتقال غیرهمانی نقاط جابه‌جا می‌شوند، پس نقطـه ثابت تبـدیل ندارد. (علوی) (تبدیل‌های هندسی ـ تبدیل همانی) (متوسط)

۵- گزینه «۲» ـ



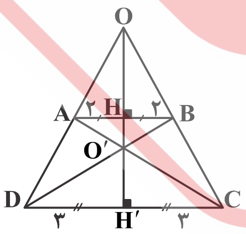
$$\overset{\Delta}{A'OB'} \sim \overset{\Delta}{AOB} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{A'OB'}}}{S_{\overset{\Delta}{AOB}}} = k^۲ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{A'OB'}} = k^۲ \cdot S_{\overset{\Delta}{AOB}}$$

$$S_{\text{هاشور}} = S_{\overset{\Delta}{A'OB'}} - S_{\overset{\Delta}{AOB}} = k^۲ \cdot S_{\overset{\Delta}{AOB}} - S_{\overset{\Delta}{AOB}} = S_{\overset{\Delta}{AOB}} \cdot (k^۲ - ۱)$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۵} \times ۴ \times ((\sqrt{\sqrt{۵}+۱})^۲ - ۱) = ۱۰$$

(علوی) (تبدیل‌های هندسی ـ تجانس) (متوسط)

۶- گزینه «۱» ـ



$$\overset{\Delta}{AOB} \sim \overset{\Delta}{COD} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{OH}{OH'} \Rightarrow \frac{۴}{۶} = \frac{OH}{OH+۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{OH}{OH+۳} \Rightarrow ۲OH + ۶ = ۳OH \Rightarrow OH = ۶$$

$$\overset{\Delta}{AO'B} \sim \overset{\Delta}{CO'D} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{O'H}{O'H'} \Rightarrow \frac{۴}{۶} = \frac{O'H}{۳ - O'H}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{O'H}{۳ - O'H} \Rightarrow ۶ - ۲O'H = ۳O'H \Rightarrow ۶ = ۵O'H \Rightarrow O'H = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

$$HH' = OH + O'H = ۶ + ۱/۲ = ۷/۲$$

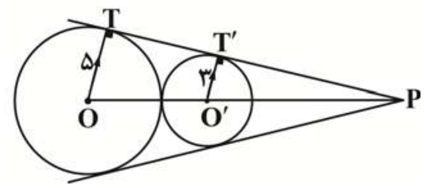
(علوی) (تبدیل‌های هندسی ـ تجانس) (دشوار)

۷- گزینه «۱» ــ هرگاه A' و A'' مجانس‌های A، O و نسبت‌های k و k' باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA' = k \cdot OA \\ OA'' = k' \cdot OA = \dfrac{k'}{k}(k \cdot OA) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} OA'' = \dfrac{k'}{k} OA' \\ OA' = \dfrac{k}{k'} OA'' \end{array}\right.$$

(کتاب همراه علوی) (تبدیل‌های هندسی ــ تجانس) (آسان)

۸- گزینه «۳» ــ محل تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره با خط‌المرکزین دو دایره، مرکز تجانس می‌باشد.

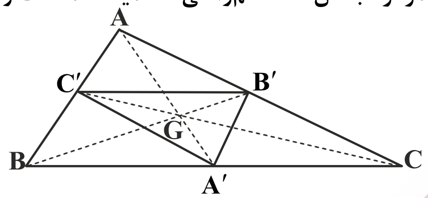


$$OT \parallel O'T' \Rightarrow \frac{PO'}{PO} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{PO'}{PO} = \frac{۳}{۵}$$

$$\xrightarrow[\text{از صورت}]{\text{تفضیل}} \frac{۸}{PO} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow PO = ۲۰$$

(کتاب همراه علوی) (تبدیل‌های هندسی ــ تجانس) (متوسط)

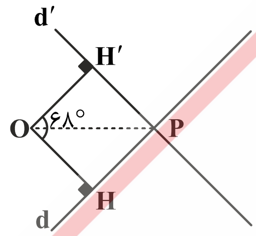
۹- گزینه «۲» ــ چون نقاط A'، B' و C' اوساط اضلاع هستند، پس A' که متناظر A هست را به هم وصل کرده و B' که متناظر B است را نیز به هم وصل کرده این دو (میانه‌ها) همدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که مرکز تجانس است، پس مرکز تجانس نقطه هم‌رأسی سه میانه مثلث و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ است.



$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA}\,,\ \overrightarrow{GB'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB}\,,\ \overrightarrow{GC'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GC}$$

(سراسری ریاضی) (تبدیل‌های هندسی ــ تجانس و ویژگی‌های آن) (دشوار)

۱۰- گزینه «۲» ــ برای دوران خط d حول نقطه O ابتدا از O به d عمود کرده و پای عمود را H می‌نامیم. سپس نقطه H را به مرکز O با زاویه $۶۸°$ دوران می‌دهیم تا H' به دست آید. در نقطه H' از O خط d' را بر OH' عمود کرده (d' دوران‌یافته d به اندازه $۶۸°$ حول O است) نقطه P نقطه تقاطع دو خط d و d' است. OP نیمساز زاویه O است، پس:



$$\widehat{OPH} = \frac{۱۸۰° - ۶۸°}{۲} = ۵۶°$$

(سراسری ریاضی) (تبدیل‌های هندسی ــ دوران و ویژگی‌های آن) (متوسط)