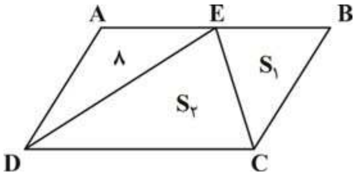
هندسه ۱

۱- گزینه «۲» ــ

$$S_۱+S_۲+۸=۲۰ \Rightarrow S_۱+S_۲=۱۲ \ \boxed{۱}$$

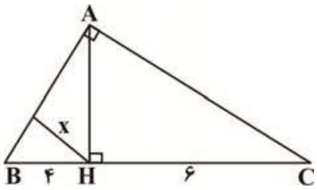
چون مجموع قاعده‌های دو مثلث ADE و BEC برابر با قاعده مثلث DEC است و هم‌چنین ارتفاع‌ها برابرند، پس داریم:



$$\xrightarrow{\boxed{۱} و \boxed{۲}} S_۱+S_۱+۸=۱۲ \Rightarrow ۲S_۱=۴ \Rightarrow S_۱=۲$$

(فیروزی) (فصل سوم ــ مساحت)

۲- گزینه «۳» ــ



$$AH^۲=BH\times HC=۶\times۴=۲۴ \Rightarrow AH=۲\sqrt{۶}$$

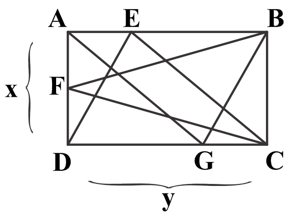
$$AB^۲=(۲\sqrt{۶})^۲+۱۶=۲۴+۱۶=۴۰ \Rightarrow AB=۲\sqrt{۱۰}$$

اندازه میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است؛ پس در مثلث AHB داریم:

$$x=\frac{AB}{۲}=\sqrt{۱۰}$$

(فیروزی) (فصل سوم ــ ویژگی مثلث قائم الزاویه)

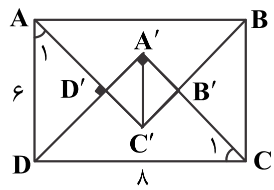
۳- گزینه «۳» ــ طول مستطیل را y و عرض آن را x در نظر می‌گیریم:



$$\left.\begin{aligned} S_{\overset{\Delta}{DEC}}&=\frac{۱}{۲}xy \\ S_{\overset{\Delta}{AGB}}&=\frac{۱}{۲}xy \\ S_{\overset{\Delta}{FBC}}&=\frac{۱}{۲}xy \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DEC}}+S_{\overset{\Delta}{AGB}}+S_{\overset{\Delta}{FBC}}=\frac{۳}{۲}xy=\frac{۳}{۲}\times۹۶=۱۴۴$$

(گروه مؤلفان علــوی) (فصل سوم ــ مساحت و کاربردهای آن)

۴- گزینه «۲» ــ از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل، یک مربع ایجاد می‌شود. باتوجه به شکل داریم:



$$\left.\begin{aligned} \overset{\Delta}{ADD'}: \hat{A}_۱=\frac{\hat{A}}{۲}=۴۵^\circ \Rightarrow DD'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AD \\ \overset{\Delta}{A'CD}: \hat{C}_۱=\frac{\hat{C}}{۲}=۴۵^\circ \Rightarrow A'D=\frac{\sqrt{۲}}{۲}CD \end{aligned}\right\}$$

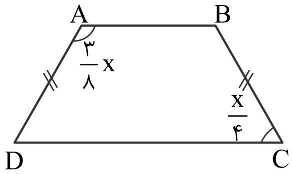
$$\Rightarrow A'D'=A'D-DD'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(CD-AD)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۸-۶)=\sqrt{۲}$$

حال طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $A'C'D'$ خواهیم داشت:

$$A'\overset{\Delta}{C'}D': A'C'^۲=A'D'^۲+C'D'^۲ \xrightarrow{A'D'=C'D'=\sqrt{۲}} A'C'^۲=(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow A'C'^۲=۴ \Rightarrow A'C'=۲$$

(گروه مؤلفان علــوی) (فصل سوم ــ چند ضلعی‌ها ــ چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها)

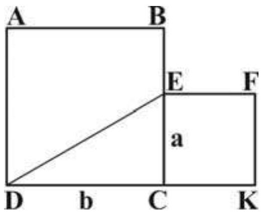
۵- گزینه «۳» ــ می‌دانیم که در هر ذوزنقه متساوی‌الساقین زوایای روبه‌رو مکمل و زوایای مجاور به قاعده‌ها با هم برابرند، بنابراین داریم:



$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{۳}{۸}x+\frac{x}{۴}=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۲۸۸^\circ$$

$$\hat{C}=\frac{x}{۴}=\frac{۲۸۸^\circ}{۴}=۷۲^\circ \xrightarrow{AD=BC} \hat{D}=\hat{C}=۷۲^\circ$$

(گروه مولفان علــوی) (فصل سوم ــ چند ضلعی‌ها ــ چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها)



۶- گزینه «۴» ـ طول ضلع‌های مربع EFKC را a و طول ضلع‌های مربع ABCD را b فرض می‌کنیم:

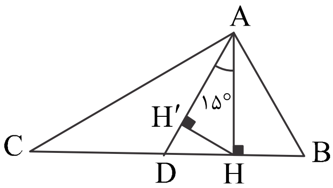
$$\left.\begin{array}{l} S_{EFKC} = a^۲ \\ S_{ABCD} = b^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموع مساحت ها} = a^۲ + b^۲$$

طبق فرض: $a^۲ + b^۲ = ۶۴$، از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه DEC داریم:

$$DE^۲ = DC^۲ + CE^۲ \Rightarrow DE^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow DE^۲ = ۶۴ \Rightarrow DE = ۸$$

(فیروزی) (فصل سوم ـ مساحت و مثلث قائم‌الزاویه)

۷- گزینه «۲» ـ می‌دانیم که زاویه بین ارتفاع و نیمساز نظیر یک رأس مثلث، برابر با نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویه دیگر است، بنابراین داریم:

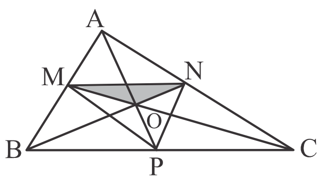


$$\widehat{HAD} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲} = \frac{۳۰°}{۲} = ۱۵°$$

هم‌چنین می‌دانیم که در یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زوایای حاده آن ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است، لذا در مثلث قائم‌الزاویه AHD خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{AHD} : \widehat{HAD} = ۱۵° \Rightarrow HH' = \frac{۱}{۴}AD$$

(کتاب همراه علوی) (فصل سوم ـ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه)

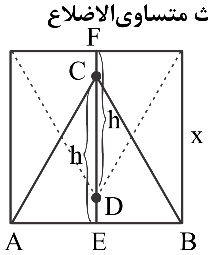


۸- گزینه «۴» ـ از نقطه P وسط ضلع BC به نقاط M و N وصل می‌کنیم. می‌دانیم مساحت مثلثی که از به هم وصل کردن اوساط اضلاع یک مثلث پدید می‌آید برابر با $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث اولیه می‌باشد و میانه‌های مثلث اولیه بر میانه‌های مثلث حاصل منطبق‌اند، یعنی نقطه O مرکز ثقل هر دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{MNP}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{OMN}} = \frac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{MNP}} \xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{۱}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}}} S_{\overset{\Delta}{OMN}} = \frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}}) = \frac{۱}{۱۲}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۸۹) (فصل سوم ـ مساحت)

۹- گزینه «۴» ـ می‌بایست طول CD را محاسبه کنیم. برای محاسبه CD کافیست طول DE را از طول CE (ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC) کم کنیم. حال برای محاسبه طول DE خواهیم داشت:



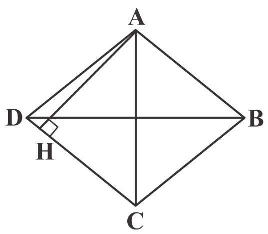
$$DE = EF - DF \xrightarrow[EF = x]{DF = h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x} DE = x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}x$$

$$CD = CE - DE \xrightarrow{CE = h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x} CD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x - (x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}x) = x(\sqrt{۳} - ۱)$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{x(\sqrt{۳} - ۱)}{x} = \sqrt{۳} - ۱$$

(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۲) (فصل سوم ـ چند ضلعی‌ها و ویژگی آن‌ها ـ مثلث متساوی‌الاضلاع)

۱۰- گزینه «۲» ـ می‌دانیم مساحت هر لوزی برابر با نصف حاصل ضرب دو قطر و هم‌چنین حاصل ضرب یک ضلع در ارتفاع نظیر آن ضلع می‌باشد، بنابراین داریم:



$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot DB}{۲} = AH \cdot CD$$

$$\xrightarrow{AC \cdot DB = ۲۴} \frac{۲۴}{۲} = AH \cdot CD \Rightarrow AH \cdot CD = ۱۲$$

(نیلی) (فصل سوم ـ مساحت و کاربردهای آن)