

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۲» - به تابعی که ضابطه‌اش به صورت $f(x) = c$ که c عددی ثابت است، تابع ثابت می‌گوییم. به عبارت دیگر برد تابع ثابت فقط یک عضو دارد و آن هم c است. در تابع داده شده برد تابع برابر 3 می‌باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$a = -3, b = -3 \Rightarrow a + b = (-3) + (-3) = -6$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۱ - تابع ثابت) (متوسط)

۲- گزینه «۳» - f یک تابع چندضابطه‌ای می‌باشد. باید مقادیر تابع خواسته شده را در محدوده‌هایی که تابع تعریف شده است به دست آوریم:

برای به دست آوردن $f(-1)$ از ضابطه دوم، $f(2)$ از ضابطه اول و $f(5)$ از ضابطه سوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-1) = \sqrt{-(-1)} - 2 = \sqrt{1} = 3$$

$$f(2) = -2 + 1 = -1$$

$$f(5) = -|5| + 3 = -5 + 3 = -2$$

$$\Rightarrow f(-1) + f(2) - f(5) = 3 + (-1) - (-2) = 3 - 1 + 2 = 4$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۱ - تابع چندضابطه‌ای) (متوسط)

۳- گزینه «۱» - به تابعی که ضابطه‌اش $f(x) = x$ باشد، تابع همانی می‌گوییم. در واقع تابع همانی تابعی است که هر عددی که واردش شود، همان عدد را به عنوان خروجی می‌دهد.

$$f(2m+1) = -m - 5 \Rightarrow 2m + 1 = -m - 5 \Rightarrow 3m = -6 \Rightarrow m = \frac{-6}{3} = -2$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۱ - تابع همانی) (متوسط)

۴- گزینه «۲» - $\text{sign}(x)$ را تابع علامت می‌نامند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$-0.27 < 0 \Rightarrow f(-0.27) = -1$$

$$\frac{3}{4} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = 1$$

$$2 > 0 \Rightarrow f(2) = 1$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{f(-0.27) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{3f(2) - f(0)} = \frac{-1 - 1}{3(1) - 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۲ - تابع علامت) (متوسط)

۵- گزینه «۴» - اعداد محدوده $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$ ، اعداد مثبت هستند، پس به جای $|x|$ باید x قرار دهیم:

$$f(x) = [-3x - |x|] - 2x = [-3x - x] - 2x = [-4x] - 2x$$

$$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 4} 1 < 4x < \frac{4}{3} \xrightarrow{\times (-)} -\frac{4}{3} < -4x < -1$$

$$\Rightarrow [-4x] = -2 \Rightarrow f(x) = -2 - 2x$$

* تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ را تابع جزء صحیح می‌نامیم. تابع جزء صحیح به همه اعداد بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ عدد k را نسبت می‌دهد و به عدد صحیح k هم خودش یعنی k را نسبت می‌دهد.

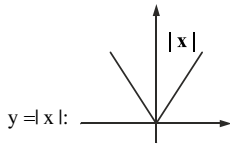
(سراسری - ۱۴۰۰ با تغییر) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۲ - تابع جزء صحیح - تابع قدرمطلق) (دشوار)

۶- گزینه «۱» - اگر $[x] = k$ باشد، آن‌گاه $k \leq x < k+1$ است، بنابراین اگر $[x] = -4$ باشد، داریم:

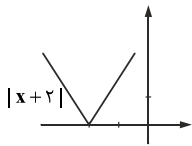
$$-4 \leq x < -4 + 1 \Rightarrow -4 \leq x < -3 \Rightarrow \text{گزینه «۱» صحیح است.}$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۲ - تابع جزء صحیح) (آسان)

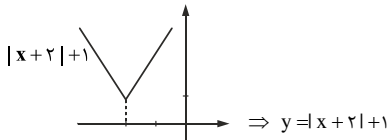
۷- گزینه «۴» - نمودار تابع قدرمطلق به صورت زیر است:



اگر نمودار را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، داریم:



سیس اگر نمودار را یک واحد به بالا انتقال دهیم، داریم:



* روش دوم: با استفاده از به دست آوردن تابع‌های خط برای $x > -2$ و $x \leq -2$ است. (سراسری خراج از کشور - ۹۸ با تغییر) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۲ - تابع قدرمطلق) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - تابع قدرمطلق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$x = \sqrt{3} - 2 \Rightarrow$$

$$f(\sqrt{3} - 2) = |\sqrt{3} - 2 - 4| = |\sqrt{3} - 6| = \begin{cases} \sqrt{3} - 6 & \text{عدد منفی} \\ 6 - \sqrt{3} & \text{عدد منفی} \end{cases}$$

$$= -(\sqrt{3} - 6) - (-\sqrt{3} - 4) = -\sqrt{3} + 6 + \sqrt{3} - 4 = 2$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۲ - تابع قدرمطلق) (متوسط)

۹- گزینه «۱» - جمله n دنباله حسابی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{cases} a_5 = -5 \\ n = 5 \Rightarrow -5 = a_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -5 = a_1 + 2 \Rightarrow a_1 = -5 - 2 = -7 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (آسان)

۱۰- گزینه «۲» - اگر میان دو عدد a و b عدد را به گونه‌ای قرار دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند، آن‌گاه اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه زیر به دست می‌آید، به طوری که تعداد کل جملات دنباله $n+2$ است.

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = -15 \\ d = -4 \end{cases}$$

$$d = \frac{b-a}{n+1} \Rightarrow -4 = \frac{-15-9}{n+1} \Rightarrow -4 = \frac{-24}{n+1} \Rightarrow n+1 = 6 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow$$

\Rightarrow تعداد جملات دنباله

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» -

$$a_1 = 10,000 - 1205 = 8795$$

$$a_2 = 8795 - 1205 = 7590$$

$$a_3 = 7590 - 1205 = 6385$$

این دنباله، یک دنباله حسابی با جمله اول، $a_1 = 8795$ و اختلاف مشترک، $d = -1205$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_7 = 8795 + (7-1)(-1205) \Rightarrow$$

$$a_7 = 8795 - 7230 = 1565 \text{ گرم}$$

وزن صفحه پس از ۷ هفته برابر ۱۵۶۵ گرم می‌باشد.

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (دشوار)

۱۲- گزینه «۱» - مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ d = -4 \Rightarrow S_9 = \frac{9}{2}[2(-3) + 8(-4)] \Rightarrow S_9 = \frac{9}{2}[-6 - 32] = \frac{9}{2}(-38) = -171 \\ n = 9 \end{cases}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - مجموع n جمله اول دنباله حسابی) (آسان)

۱۳- گزینه «۴» -

$$\frac{a_9}{a_3} = 2; a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \frac{a_1 + 8d}{a_1 + 2d} = 2 \Rightarrow$$

$$a_1 + 8d = 2a_1 + 4d \Rightarrow a_1 = 4d$$

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت زیر است:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow -36 = \frac{9}{2}[2a_1 + 8d] \xrightarrow{a_1=4d}$$

$$-36 = \frac{9}{2}[2(4d) + 8d] \Rightarrow -36 = \frac{9}{2}(16d) \Rightarrow d = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 = 4d \Rightarrow a_1 = 4(-\frac{1}{2}) = -2 \Rightarrow a_7 = -2 + 6(-\frac{1}{2}) \Rightarrow a_7 = -2 - 3 = -5$$

(سراسری - ۱۴۰۰ با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - مجموع n جمله اول دنباله حسابی) (دشوار)

۱۴- گزینه «۲» - مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]; a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$\Rightarrow -4 = \frac{n}{2}[-\frac{1}{3} - \frac{1}{\Delta}] \Rightarrow -4 = \frac{n}{2}(-\frac{\lambda}{15}) \Rightarrow \lambda = \frac{6n}{15} \Rightarrow n = 15$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - مجموع n جمله اول دنباله حسابی) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» -

دنباله حسابی با اختلاف مشترک ۳- می باشد

$$a_n = a_{n+1} + 3 \Rightarrow a_{n+1} = a_n - 3 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}[2(\Delta) + 9(-3)] \Rightarrow$$

$$S_1 = \Delta(1 - 27) = -8\Delta$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - مجموع n جمله اول دنباله حسابی) (متوسط)

۱۶- گزینه «۲» - جمله nام یک دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می آید که در آن a_1 جمله اول و r نسبت مشترک دنباله است.

$$a_6 = \lambda(-\frac{1}{3})^5 = \lambda(-\frac{1}{243}) = -\frac{1}{4}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (آسان)

۱۷- گزینه «۳» - جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ می باشد که a_1 جمله اول و r نسبت مشترک دنباله است.

$$\frac{a_1}{a_5} = 32 \Rightarrow \frac{a_1 r^0}{a_1 r^4} = 32 \Rightarrow r^4 = \frac{1}{32} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$a_7 = -8 \Rightarrow a_1 r^6 = -8 \Rightarrow a_1 (\frac{1}{2})^6 = -8 \Rightarrow a_1 = -64$$

$$a_4 - a_6 = a_1 r^3 - a_1 r^5 = a_1 r^3 (1 - r^2) = (-64)(\frac{1}{8})(1 - \frac{1}{4}) \Rightarrow$$

$$a_4 - a_6 = (-64)(\frac{1}{8})(\frac{3}{4}) = -24$$

(سراسری - ۱۴۰۱ با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۳» -

$$-3a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow a_{n+1} = -\frac{2}{3}a_n \Rightarrow r = -\frac{2}{3}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_4 = (-9)(-\frac{2}{3})^3 = (-9)(-\frac{8}{27}) = \frac{8}{3}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (متوسط)

۱۹- گزینه «۱» -

جمله عمومی دنباله هندسی: $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\begin{cases} a_7 + a_6 = 3 \\ a_5 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^6 + a_1 r^5 = 3 \\ a_1 r^4 = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می کنیم}}$$

$$\frac{a_1 r^6 + a_1 r^5}{a_1 r^4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a_1 r^5 (1+r)}{a_1 r^4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow r(1+r) = \frac{3}{4} \Rightarrow r^2 + r - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{-1 \pm 2}{2} = \frac{1}{2} \text{ یا } -\frac{3}{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1)(-\frac{3}{4}) = 4$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r = \frac{-1 \pm 2}{2} = \frac{1}{2}, r = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2}$$

چون دنباله کاهشی است با $a_1 > 0$ باید $r < 1$ باشد، بنابراین $r = \frac{1}{2}$ قابل قبول است.

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (دشوار)

۲۰- گزینه «۲» -

$$\text{از } -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{32}, \dots \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$$

$$r = \frac{-\frac{1}{8}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = (-\frac{1}{2})(\frac{1}{4})^{n-1} = (-\frac{1}{2})(\frac{1}{4})^{n-1} = (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{2(n-1)} =$$

$$(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{2n-2} = (-\frac{1}{2})^{2n-1}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (متوسط)