

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۱» -

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 1 \\ a_7 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_7 = a_1 + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = 1 \\ a_1 + 6d = -5 \end{cases}$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم. $\rightarrow a_1 + 3d - (a_1 + 6d) = 1 - (-5) \Rightarrow a_1 + 3d - a_1 - 6d = 6 \Rightarrow d = -2$

$$a_8 - a_{12} = (a_1 + 7d) - (a_1 + 11d) = 7d - 11d = -4d = -4(-2) = 8 \Rightarrow a_8 - a_{12} = 8$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (متوسط)

۲- گزینه «۴» -

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_6 - 2a_4 = 4 \Rightarrow a_1 + 5d - 2(a_1 + 3d) = 4 \Rightarrow a_1 + 5d - 2a_1 - 6d = 4 \Rightarrow -a_1 - 11d = 4$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 + 11d}_{a_{12}} = -4 \Rightarrow a_{12} = -4$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (آسان)

۳- گزینه «۲» - ابتدا اختلاف مشترک دنباله را حساب می‌کنیم:

$$d = a_7 - a_1 = 1 - (-4) = 5$$

سپس با داشتن جملات اول و آخر و اختلاف مشترک، تعداد جملات را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 36 = -4 + (n-1)(5) \Rightarrow 40 = 5n - 5 \Rightarrow n = 9$$

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ به دست می‌آید:

$$S_9 = \frac{9}{2}(-4 + 36) = \frac{9}{2}(32) \Rightarrow S_9 = 144$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (متوسط)

۴- گزینه «۱» - مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ S_{16} = -88 \\ n = 16 \end{cases} \Rightarrow S_{16} = -88 \Rightarrow -88 = \frac{16}{2}[2(7) + (16-1)(d)] \Rightarrow -88 = 8[14 + 15d] \Rightarrow 14 + 15d = -11$$

$$15d = -11 - 14 \Rightarrow 15d = -25 \Rightarrow d = -\frac{5}{3}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (متوسط)

۵- گزینه «۲» -

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow 90 = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12}) \Rightarrow a_1 + a_{12} = 15 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 11d) = 15 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 15$$

$$a_7 + a_{10} = (a_1 + 6d) + (a_1 + 9d) = \underbrace{2a_1 + 15d}_{15} \Rightarrow a_7 + a_{10} = 15$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (متوسط)

۶- گزینه «۴» -

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}[2a_1 + 19d] \Rightarrow 10[2a_1 + 19d] = -650 \Rightarrow 2a_1 + 19d = -65 \quad (*)$$

$$\text{سؤال روی سؤال: } a_{10} + a_{13} = a_8 - a_8 \Rightarrow a_1 + 9d + a_1 + 12d = a_1 + 4d - a_1 - 7d \Rightarrow a_1 = -12d$$

$$\text{از } (*) \Rightarrow 2(-12d) + 19d = -65 \Rightarrow d = 13$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (دشوار)

۷- گزینه «۳» -

$$a_1 = -2, a_n - a_{n+1} = \frac{1}{8} \Rightarrow \underbrace{a_{n+1} - a_n}_{d} = -\frac{1}{8} \Rightarrow d = -\frac{1}{8}, S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}[2(-2) + 16(-\frac{1}{8})] = \frac{17}{2}[-4 - 2] = -51$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (متوسط)

$$S_n = \frac{n}{r}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{r} \\ a_7 = \frac{1}{r} \end{cases} \Rightarrow S_7 = \frac{7}{r} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) = \frac{7}{r} \left(\frac{-7+7}{r}\right) \Rightarrow S_7 = \frac{7}{r} \left(-\frac{4}{r}\right) = -\frac{28}{r}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس ۲ - دنباله‌های حسابی) (آسان)

۹- گزینه «۲» - دنباله داده شده یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $-\frac{1}{3}$ می‌باشد:

$$-3, 1, -\frac{1}{3}, \dots$$

$$\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \text{ یا } \frac{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow r = -\frac{1}{3}; a_1 = -3$$

جمله n ام یک دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1(r)^4 & a_7 &= a_1(r)^6 \\ \frac{a_7}{a_5} &= \frac{a_1 r^6}{a_1 r^4} = r^2 & \Rightarrow \frac{a_7}{a_5} &= \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (آسان)

۱۰- گزینه «۴» -

جمله عمومی دنباله هندسی: $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\begin{cases} a_7 = -8 \\ a_8 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 = a_1 r^7 \\ \frac{1}{4} = a_1 r^8 \end{cases} \Rightarrow \frac{-8}{\frac{1}{4}} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^8} \Rightarrow -32 = \frac{1}{r} \Rightarrow r = -\frac{1}{32} \Rightarrow r^5 = \left(-\frac{1}{32}\right)^5 \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$$

r را در یکی از معادلات بالا قرار می‌دهیم تا a_1 به دست آید:

$$a_7 = -8 \Rightarrow -8 = a_1 r^7 \Rightarrow -8 = a_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow -8 = a_1 \left(-\frac{1}{128}\right) \Rightarrow a_1 = -32$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» -

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_5 = 3 \Rightarrow a_1 r^4 = 3$$

$$a_6 + a_7 = 60 \Rightarrow a_1 r^5 + a_1 r^6 = 60 \Rightarrow a_1 r^5 (1+r) = 60$$

$$\frac{a_1 r^5 (1+r)}{a_1 r^4} = \frac{60}{3} \Rightarrow r(1+r) = 20 \Rightarrow r^2 + r - 20 = 0 \Rightarrow (r+5)(r-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -5 \times \\ r = 4 \checkmark \end{cases}$$

چون دنباله افزایشی است، بنابراین $r = 4$ قابل قبول است. (اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» -

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\begin{cases} a_5 = 16 \\ a_7 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^4 = 16 \\ a_1 r^6 = -\frac{1}{4} \end{cases} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم.}]{\text{دو طرف را بر هم}} \frac{a_1 r^4}{a_1 r^6} = \frac{16}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow r^2 = -64 \Rightarrow r = -4$$

$$\text{از } a_7 r = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 (-4) = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{16}$$

چون $r = -4$ می‌باشد، رابطه بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_{n+1} = -4a_n, a_1 = \frac{1}{16}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (متوسط)

$$a_1 = -\frac{1}{4}, a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_7 \times a_8 = 2 \Rightarrow a_1 r \times a_1 r^7 = 2 \Rightarrow a_1^2 r^8 = 2 \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^2 r^8 = 2 \Rightarrow r^8 = 32 \Rightarrow r = 2$$

$$\text{از } a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = -\frac{1}{4} (2)^{n-1} = -\frac{2^{n-1}}{4} = -(2)^{n-3}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (متوسط)

$$\begin{cases} a_4 - a_5 = 2 \\ a_5 - a_7 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^3 - a_1 r^4 = 2 \\ a_1 r^4 - a_1 r^6 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^3 (1-r) = 2 \\ a_1 r^4 (1-r^2) = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین معادله را بر هم تقسیم می کنیم.}} \frac{a_1 r^3 (1-r)}{a_1 r^4 (1-r^2)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r(1+r)} = \frac{1}{6} \Rightarrow r(r+1) = 6 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (r+3)(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \checkmark \\ r = -3 \text{ غ ق} \end{cases}$$

دنباله افزایشی است.

r را در یکی از معادلات بالا قرار می دهیم و a₁ را به دست می آوریم:

$$a_1 r^3 (1-r) = 2 \Rightarrow a_1 (2)^3 (1-2) = 2 \Rightarrow -8a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{4}$$

$$a_7 = a_1 r \Rightarrow a_7 = -\frac{1}{4} (2) = -\frac{1}{2}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (دشوار)

$$a_1 = -25$$

$$a_n = -5a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = -\frac{1}{5}a_n \Rightarrow r = -\frac{1}{5}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}, a_n = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \Rightarrow \frac{1}{5^3} = -25^2 \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{5}\right)^5 \Rightarrow n-1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس ۱ - دنباله هندسی) (متوسط)

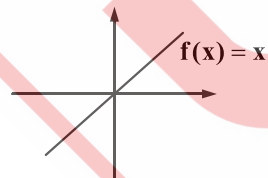
$$\text{چون } m > 0 \Rightarrow m^2 > 0, -m^3 < 0$$

بنابراین برای به دست آوردن f(m²) از ضابطه پایین و برای به دست آوردن f(-m³) از ضابطه بالا استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} f(m^2) = -3 \\ f(-m^3) = 5 \end{cases} \Rightarrow f(m^2) - f(-m^3) = -3 - 5 = -8$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۱ - تابع چندضابطه ای) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» - ضابطه تابع همانی به صورت f(x) = x می باشد که نمودار این تابع حتماً روی خط y = x (نیمساز ناحیه اول و سوم) قرار دارد.



$$2a - 3 = \frac{1}{5}a + 6 \text{ در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، مؤلفه اول و دوم با هم برابرند:}$$

$$2a - \frac{1}{5}a = 6 + 3 \Rightarrow \frac{9}{5}a = 9 \Rightarrow a = 5$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۱ - تابع همانی) (متوسط)

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sign}(m+2) = 1 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

بنابراین فقط mهای بزرگ تر از ۲- قابل قبول است. ۳- بزرگ تر از ۲- نیست، بنابراین ۳- قابل قبول نیست.

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۲ - تابع علامت) (آسان)

۱۹- گزینه «۱» - تابع جزء صحیح به همه اعداد بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ ، عدد k را نسبت می‌دهد و به عدد صحیح k نیز، k را نسبت می‌دهد. بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: $x=0 \Rightarrow f(0) = -[\frac{1}{4}-0] = 0; (0, -1) \times$

گزینه «۲»: $x = \frac{1}{4} \Rightarrow f(\frac{1}{4}) = -[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}] = -[-\frac{13}{4}] = 3; (\frac{1}{4}, 3) \checkmark$

گزینه «۳»: $x = -\frac{3}{4} \Rightarrow f(-\frac{3}{4}) = -[\frac{1}{4} - (-\frac{3}{4})] = -[2] = -2; (-\frac{3}{4}, -2) \checkmark$

گزینه «۴»: $x = -\sqrt{10} \Rightarrow f(-\sqrt{10}) = -[\frac{1}{4} - (-\sqrt{10})] = -3, \sqrt{10} \approx 3.16; (-\sqrt{10}, -3) \checkmark$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۲ - تابع جزء صحیح) (دشوار)

۲۰- گزینه «۳» - تابع قدرمطلق x یک تابع دوضابطه‌ای به صورت

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{3}{2} & 2x - \frac{3}{2} \geq 0 \\ -(2x - \frac{3}{2}) & 2x - \frac{3}{2} < 0 \end{cases}$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس ۲ - تابع قدرمطلق) (متوسط)