ریاضیات

۱- گزینه «۲» ـ چون تابع نمایی است پس $m^{۲}-۱=۰$ و در نتیجه $m=\pm ۱$ خواهد بود.

$$m=۱ \Rightarrow f(x)=۳^{x} \rightarrow \text{صعودی اکید}$$

$$m=-۱ \Rightarrow f(x)=(\frac{۱}{۳})^{x} \rightarrow \text{نزولی اکید}$$

تابع نمایی موردنظر نزولی اکید است پس $m=-۱$ می‌باشد.

$$f(۲m)=f(-۲)=(\frac{۱}{۳})^{-۲}=۹$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نمودار نمایی)

۲- گزینه «۱» ـ

$$\log_{۲} x+\log_{۲}(x-۱)=۴ \Rightarrow \log_{۲} x(x-۱)=۴ \Rightarrow x^{۲}-x=۱۶$$

$$\log_{\sqrt{۱۰}} \frac{x^{۲}-x-۶}{x^{۲}-x-۱۵}=\log_{\sqrt{۱۰}} \frac{۱۶-۶}{۱۶-۱۵}=\log_{\sqrt{۱۰}} ۱۰=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ معادلات لگاریتمی)

۳- گزینه «۲» ـ

$$۳\times ۲^{x-۱}=۳\times ۳۲ \Rightarrow x-۱=۵ \Rightarrow x=۶$$

$$\log_{۲}(۱+\sqrt{x+۳})=\log_{۲}(۱+۳)=\log_{۲} ۴=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ دروس اول و دوم ـ معادلات نمایی و معادلات لگاریتمی)

۴- گزینه «۲» ـ برای محاسبه دامنه بایستی:

$$ax+b>۰ \Rightarrow ax>-b \xrightarrow{a<۰} x<-\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow a=-۳b$$

$$f(۰)=-۲ \Rightarrow \log_{۰/۵} b=-۲ \Rightarrow b=(۰/۵)^{-۲}=(\frac{۱}{۲})^{-۲}=۴ \Rightarrow a=-۱۲$$

$$f(x)=\log_{۰/۵}(۴-۱۲x)$$

برای محاسبه $f^{-۱}(-۴)$ داریم:

$$\log_{۰/۵}(۴-۱۲x)=-۴ \Rightarrow ۴-۱۲x=(\frac{۱}{۲})^{-۴}=۱۶ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow f^{-۱}(-۴)=-۱$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ دامنه لگاریتم و قوانین لگاریتم ـ مفهوم وارون لگاریتم)

۵- گزینه «۴» ـ

$$\begin{cases} \log E_{۱}=۱۱/۸+۱/۵\times ۵ \\ \log E_{۲}=۱۱/۸\times ۱/۵\times ۷ \end{cases} \xrightarrow{-} \log\frac{E_{۲}}{E_{۱}}=۳ \Rightarrow \frac{E_{۲}}{E_{۱}}=۱۰^{۳}=۱۰۰۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل پنجم ـ درس سوم ـ کاربرد لگاریتم در زلزله)

۶- گزینه «۲» ـ

$$m_{L_۲} = \frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰} = \frac{۲-۰}{۴-۰} = \frac{۱}{۲}$$

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}$$

حاصل‌ضرب شیب‌ها برابر $\frac{۱}{۴}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول و دوم ـ تعریف و تابع مشتق)

۷- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=\frac{a}{x+۱} \Rightarrow f'(x)=\frac{-a}{(x+۱)^۲} \Rightarrow f'(۳)=\frac{-a}{۱۶}$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x^۲-۹} = \lim_{x\to ۳}\frac{۱}{x+۳} \times \lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \frac{۱}{۶}f'(۳)$$

$$\frac{۱}{۶}f'(۳)=\frac{۱}{۱۲} \Rightarrow f'(۳)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{a}{۱۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-۸$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول و دوم ـ تعریف و تابع مشتق)

۸- گزینه «۲» ـ در همسایگی چپ $x=۲$ تابع $f(x)$ به $f(x)=۴-x^۲$ تبدیل می‌شود.

$$f(x)=۴-x^۲ \Rightarrow f'(x)=-۲x \Rightarrow f'(۲)=-۴$$

حال با نقطه $A(۲,۰)$ و شیب -۴ معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-۰=-۴(x-۲) \Rightarrow y=۸-۴x$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ معادله نیم‌مماس)

۹- گزینه «۳» ـ

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)} \Rightarrow y'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}$$

حال مقادیر خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.

$$f(۱)=۲\,,\, f'(۱)=۳\,,\, g(۱)=۴\,,\, g'(۱)=۵$$

$$y'(۱)=\frac{۳\times۴-۵\times۲}{(۴)^۲}=\frac{۱۲-۱۰}{۱۶}=\frac{۱}{۸}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ تابع مشتق)

۱۰- گزینه «۴» ـ

$$h(x)=f(۲x) \Rightarrow h'(x)=۲f'(۲x) \Rightarrow h'(۱)=۲f'(۲)$$

$$m(x)=f(۲x^۲) \Rightarrow m'(x)=۴xf'(۲x^۲) \Rightarrow m'(۱)=۴f'(۲)$$

$$\frac{h'(۱)}{m'(۱)}=\frac{۲f'(۲)}{۴f'(۲)}=\frac{۱}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق تابع مرکب)

۱۱- گزینه «۳» ـ چون A رأس سهمی است پس $f'(۳)=۰$ است یعنی مماس در A افقی است. از طرفی سهمی یک تابع متقارن است پس دو نقطه با طول‌های $\frac{۷}{۴}$ و a نسبت به ۳ متقارن هستند.

$$\frac{۷}{۴}+a=۲\times۳ \Rightarrow a=۶-\frac{۷}{۴}=\frac{۲۴-۷}{۴}=\frac{۱۷}{۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ مفهوم مماس)

۱۲- گزینه «۱» ـ با توجه به تعریف مشتق $f'(۲) = \lim\limits_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ پس رابطه داده شده به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$(f'(۲))^۲ = ۴f'(۲) - ۴ \Rightarrow (f'(۲))^۲ - ۴f'(۲) + ۴ = ۰ \Rightarrow (f'(۲)-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow f'(۲) = ۲$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{۲x-۴} = \frac{۱}{۲}f'(۲) = \frac{۱}{۲}\times ۲ = ۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ تعریف مشتق)

۱۳- گزینه «۳» ـ مختصات ابتدا و انتهای تابع و شیب خط واصل آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$A(۴,۰) ، B(۹,۱) \Rightarrow m_{AB} = \frac{۱-۰}{۹-۴} = \frac{۱}{۵}$$

$$f'(x) = \frac{۲+۸}{(x+۱)^۲} = \frac{۱۰}{(x+۱)^۲}$$

چون خط قاطع با خط مماس در c با هم موازی‌اند، پس:

$$f'(c) = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{۱۰}{(c+۱)^۲} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow (c+۱)^۲ = ۵۰$$

$$\Rightarrow c+۱ = \pm ۵\sqrt{۲} \xrightarrow{۴<c<۹} c = ۵\sqrt{۲}-۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ خط مماس)

۱۴- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۱+h)-f(۱)}{h} = \lim_{h\to ۰^-} \frac{۴(۱+h)-۲}{h} = \lim_{h\to ۰^-} \frac{۴h+۲}{h} = \frac{۲}{۰^-} = -\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری)

۱۵- گزینه «۳» ـ تابع $h(x) = f^۲(x) + g^۲(x)$ را با دامنه $[۱,۱۷]$ در نظر می‌گیریم:

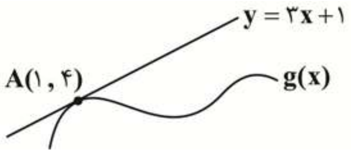
$$h(x) = (\sqrt[۴]{x-۱})^۲ + (\sqrt{۴-\sqrt{x-۱}})^۲ = \sqrt{x-۱} + ۴ - \sqrt{x-۱} = ۴$$

$$\Rightarrow f^۲(x) + g^۲(x) = ۴ \Rightarrow ۲f(x)f'(x) + ۲g(x)g'(x) = ۰$$

$$\xrightarrow{x=۱۰} f(۱۰)f'(۱۰) + g(۱۰)g'(۱۰) = ۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ تابع مشتق)

۱۶- گزینه «۱» ـ چون خط $y = ۳x+۱$ در $x = ۱$ بر تابع g مماس است پس $\begin{cases} g(۱) = ۴ \\ g'(۱) = ۳ \end{cases}$ خواهد بود. از طرفی $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = ۵$ است، پس $f'(۴) = ۵$ می‌باشد.



$$(fog)'(۱) = g'(۱)f'(g(۱)) = ۳f'(۴) = ۳\times ۵ = ۱۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق تابع مرکب)

۱۷- گزینه «۲» ــ

$$y = ax^۲ + bx + c \Rightarrow y' = ۲ax + b \Rightarrow y'' = ۲a$$

$$y + xy' + y'' + x^۲ + x = ax^۲ + bx + c + x(۲ax + b) + ۲a + x^۲ + x \equiv ۰$$

$$\Rightarrow (a + ۲a + ۱)x^۲ + (b + b + ۱)x + c + ۲a \equiv ۰$$

$$\Rightarrow (۱ + ۳a)x^۲ + (۱ + ۲b)x + (c + ۲a) \equiv ۰$$

$$\begin{cases} ۱ + ۳a = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۳} \\ ۱ + ۲b = ۰ \Rightarrow b = \frac{-۱}{۲} \\ c + ۲a = ۰ \Rightarrow c = -۲a = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$f(۱) = a + b + c = \frac{-۱}{۳} - \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} = \frac{-۱}{۶}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس دوم ــ مشتق مرتبه دوم)

۱۸- گزینه «۱» ــ خواسته مسئله $f'(۲)$ است.

$$f(x) = \underbrace{(x^۲ - ۴)}_{h(x)} \underbrace{\frac{x + ۳}{x - ۱}}_{g(x)}$$

$h(x)$ عامل صفرکننده و مشتق‌پذیر است.

$$f'(۲) = h'(۲) \times g(۲) = ۲ \times ۲ \times \frac{۲ + ۳}{۲ - ۱} = ۲۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس دوم ــ تابع مشتق)

۱۹- گزینه «۳» ــ ضابطه تابع $f(x)$ که معلوم است. تابع g یک تابع خطی است که از دو نقطه $A(۴, ۰)$, $B(a, ۵)$ عبور می‌کند. چون B روی f نیز قرار دارد با جایگذاری B در f مقدار a برابر -۱ به‌دست می‌آید. پس تابع g از دو نقطه $A(۴, ۰)$ و $B(-۱, ۵)$ عبور می‌کند.

$$m_{AB} = \frac{۵ - ۰}{-۱ - ۴} = -۱ \Rightarrow AB : y - ۰ = -۱(x - ۴) = ۴ - x$$

$$h(x) = f(x)g(x) = (۴ - x)(x^۲ - ۴x)$$

$$h'(x) = -۱(x^۲ - ۴x) + (۲x - ۴)(۴ - x)$$

$$h'(-۱) = -۱(۱ + ۴) + (-۲ - ۴)(۴ + ۱) = -۵ - ۳۰ = -۳۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس دوم ــ تابع مشتق)

۲۰- گزینه «۳» ــ در همسایگی $x = ۹$ تابع را می‌توانیم به صورت توانی تبدیل کنیم:

$$f(x) = x(x - ۱)^{\frac{-۲}{۳}} \Rightarrow f'(x) = (x - ۱)^{\frac{-۲}{۳}} - \frac{۲}{۳}(x - ۱)^{\frac{-۵}{۳}} x$$

$$f'(۹) = ۸^{\frac{-۲}{۳}} - \frac{۲}{۳} \times ۸^{\frac{-۵}{۳}} \times ۹ = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۸^۲}} - \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{۸^۵}} \times ۹ = \frac{۱}{۴} - \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳۲} \times ۹ = \frac{۱}{۴} - \frac{۳}{۱۶} = \frac{۱}{۱۶}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس سوم ــ آهنگ تغییر)

۲۱- گزینه «۱» ــ تابع $f(x)$ یک تابع خطی با شیب $\tan ۴۵^\circ = ۱$ می‌باشد، پس $f'(x) = ۱$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس دوم ــ نمودار مشتق)

۲۲- گزینه «۴» ـ تابع در $x=۱$ پیوسته است زیرا:

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\sqrt[۳]{x}=\lim_{x\to ۱^+}(x^۲+۴x-۴)=۱$$

حال مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x+۴ & x>۱\\ \dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} & x<۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۱)=۶\\ f'_-(۱)=\dfrac{۱}{۳}\end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌های یک‌طرفه)

۲۳- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=|x^۲(۱-x)|=|x^۲||۱-x|=x^۲|x-۱|=\begin{cases}x^۲(x-۱) & x\geq ۱\\ -x^۲(x-۱) & x<۱\end{cases}$$

دقت کنید که تابع f در $x=۰$ مشتق‌پذیر است و در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f(x)=\begin{cases}x^۳-x^۲ & x\geq ۱\\ x^۲-x^۳ & x<۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۲x & x>۱\\ ۲x-۳x^۲ & x<۱\end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری و تابع مشتق)

۲۴- گزینه «۴» ـ

$$f'(x)=۹x^۲-۲kx-۶=۰$$

اگر ریشه‌های مشتق را α و β فرض کنیم:

$$\alpha+\beta=۲\Rightarrow\frac{۲k}{۹}=۲\Rightarrow k=۹$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ تابع مشتق)

۲۵- گزینه «۳» ـ اگر طول نقطه موردنظر را c فرض کنیم:

$$f'(c)=\frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}\Rightarrow ۳c^۲-۳=\frac{(۸-۶+k)-(۱-۳+k)}{۱}$$

$$\Rightarrow ۳c^۲-۳=۲+k+۲-k\Rightarrow ۳c^۲=۷\xrightarrow{۱<c<۲}c=\sqrt{\frac{۷}{۳}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ آهنگ تغییر)