ریاضیات

۱- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{(x-۲)(x+۲)}=۴ \Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x+۲}=۴ \Rightarrow f'(۲)\times\frac{۱}{۴}=۴\Rightarrow f'(۲)=۱۶$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}=-f'(۲)=-۱۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق)

۲- گزینه «۱» ـ اگر از چپ به راست خطوط مماس را رسم کنیم شیب آنها افزایش می‌یابد، صفر می‌شود و به افزایش خود ادامه می‌دهد مجدداً صفر می‌شود و در نهایت کاهش می‌یابد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ شیب)

۳- گزینه «۴» ـ چون $\lim\limits_{x\to -۴}\frac{f(x)-۵}{x+۴}=۸$ پس $f(-۴)=۵$ و $f'(-۴)=۸$ حال می‌توان نتیجه گرفت که نقطه $A(-۴\,,۵)$ متعلق به f و شیب خط مماس برابر ۸ است حال می‌توان معادله خط مماس را از نقطه A نوشت.

$y-۵=۸(x+۴) \Rightarrow y=۸x+۳۷ \Rightarrow$ عرض از مبدا $=۳۷$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس)

۴- گزینه «۳» ـ خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطه $A(۱\,,۲)$ از مبدأ عبور می‌کند پس خط مماس از دو نقطه $(۰\,,۰)$ و $(۱\,,۲)$ عبور می‌کند و درنتیجه شیب آن برابر است با:

$$\frac{۲-۰}{۱-۰}=۲ \Rightarrow f'(۱)=۲$$

از طرفی $f(۱)=۲$ است پس $f(۱)f'(۱)=۴$ می‌باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس)

۵- گزینه «۲» ـ ابتدا از $fog(x)$ مشتق می‌گیریم و سپس از نمودار استفاده می‌کنیم.

$$f(g(x)) \xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x)\times f'(g(x)) \xrightarrow{x=۲} g'(۲)\times f'(g(۲))=?$$

برای نوشتن معادله خط $g(x)$ از دو نقطه $A\Big|_{۴}^{۰}$ و $B\Big|_{۰}^{۴}$ کمک می‌گیریم.

$$m_{AB}=\frac{۴-۰}{۰-۴}=-۱ \Rightarrow y-۰=-۱(x-۴) \Rightarrow y=-x+۴ \Rightarrow g(x)=-x+۴ \Rightarrow \begin{cases} g(۲)=۲ \\ g'(۲)=-۱ \end{cases}$$

از طرفی شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در $g(۲)=۲$ برابر (-۱) است، پس:

$$g'(۲)\times f'(g(۲))=(-۱)\times f'(۲)=(-۱)\times(-۱)=۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق ترکیب دو تابع)

۶- گزینه «۲» ـ

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}+\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{x+۱}=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}-\frac{۱}{۲(x+۱)\sqrt{x+۱}} \Rightarrow f'(۰)=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ لحظه‌ای)

۷- گزینه «۱» ـ ابتدا پیوستگی‌های راست و چپ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x^۳-۲x)=۴ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(-x^۲+۷x)=۱۰ \\ f(۲)=۱۰ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x=۲$ فقط پیوستگی راست دارد. بنابراین $f'_-(۲)$ موجود نیست و برای یافتن مشتق راست در $x=۲$ داریم:

$$x\to ۲^+ \Rightarrow f(x)=-x^۲+۷x \Rightarrow f'(x)=-۲x+۷ \Rightarrow f'_+(۲)=۳$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری)

۸- گزینه «۴» ـ ابتدا ریشه‌های زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم. (یکی از ریشه‌ها $x = 1$ است.)

$$x^3 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-3x-3) = 0$$

یکی از ریشه‌ها $x = 1$ و مجموع دو ریشه دیگر برابر مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 3 = 0$ است پس $\alpha + \beta = 3$ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری)

۹- گزینه «۳» ـ طبق تعریف مشتق، $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ برابر با مشتق چپ f در $x = 2$ است. تابع در همسایگی چپ $x = 2$ به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$x \le 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'_-(2) = 2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق یک طرفه)

۱۰- گزینه «۱» ـ تابع f در نقطه C به دلیل ناپیوستگی و در نقطه D به دلیل شکسته (گوشه‌دار) بودن مشتق‌پذیر نیست.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری)

۱۱- گزینه «۳» ـ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) + g'(x)f(x)}{f(x)g(x)} = \frac{(fg)'(x)}{(fg)(x)} = \frac{(x^3)'}{x^3} = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تابع مشتق)

۱۲- گزینه «۱» ـ $(1, -1)$ نقطه مماس

$$f'(x) = \frac{3(2x^2+3x+2) - (4x+3)(3x+4)}{(2x^2+3x+2)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{3-(-1)}{1} = 4 = m_{\text{مماس}}$$

$$\text{معادله مماس}: y - 1 = 4(x+1) \Rightarrow y = 4x + 5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس)

۱۳- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 6 \Rightarrow f'(3) = 6$$

$$(f(\sqrt{4-5x}))' = -5 \times \frac{1}{2\sqrt{4-5x}} \times f'(\sqrt{4-5x}) \xrightarrow{x=-1} -5 \times \frac{1}{6} \times f'(3) = -\frac{5}{6} \times 6 = -5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تابع مشتق و تعریف مشتق)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$$

$$f'(x) = 3\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^2 \times \frac{\dfrac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}}(x^2-x) - (2x-1)\sqrt[3]{x^2+2x}}{(x^2-x)^2}$$

$$f'(2) = 3\left(\frac{2}{2}\right)^2 \times \frac{\dfrac{6}{3\times 4}(2) - 3\times 2}{(2)^2} = 3 \times \frac{1-6}{4} = \frac{-15}{4}$$

(سراسری تجربی ۹۹) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تابع مشتق)

۱۵- گزینه «۱» ـ قرار می‌دهیم $\log_2 12 = a$ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{\log_{96} 2} = \log_2 96 = \log_2(2^3 \times 12) = 3 + a$$

$$\log_2 24 = 1 + a$$

$$\log_2 192 = \log_2(16 \times 12) = 4 + a$$

$$\frac{1}{\log_{12} 2} = \log_2 12 = a$$

بنابراین:

$$A = (1+a)(3+a) - (4+a)a = 3$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ لگاریتم ـ قوانین لگاریتم)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$\sqrt[۳]{۰/۲۵}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}=(۴^{-۱})^{\frac{۱}{۳}}=(۲^{-۲})^{\frac{۱}{۳}}=۲^{-\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \log_۸ ۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}=\log_{۲^۳} ۲\times ۲^{\frac{-۲}{۳}}=\log_{۲^۳} ۲^{\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۳}\log_۲ ۲=\frac{۱}{۹}=A$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{A}+۷=\frac{۱}{\frac{۱}{۹}}+۷=۹+۷=۱۶$$

$$\log_۴ \frac{۱}{A}+۷=\log_۸ ۱۶=\log_{۲^۳} ۲^۴=\frac{۴}{۳}\log_۲ ۲=\frac{۴}{۳}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ لگاریتم ـ قوانین لگاریتم)

۱۷- گزینه «۳» ـ

$$\log_۲ x-\log_۲ y=۱ \Rightarrow \log_۲ \frac{x}{y}=۱ \Rightarrow \frac{x}{y}=۲ \Rightarrow x=۲y$$

$$۲^x=۳^{y+۱} \Rightarrow ۲^{۲y}=۳^{y+۱} \Rightarrow ۴^y=۳^{y+۱} \Rightarrow \log_۳ ۴^y=y+۱ \Rightarrow y\log_۳ ۴=y+۱ \Rightarrow y(\log_۳ ۴-۱)=۱ \Rightarrow \frac{۱}{y}=\log_۳ ۴-۱$$

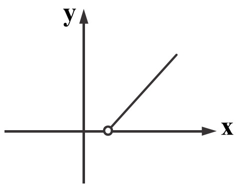
(نصیری) (پایه یازدهم ـ لگاریتم ـ دستگاه لگاریتم و لگاریتم نمایی)

۱۸- گزینه «۳» ـ دامنه تابع $f(x)=۳^{\log_۳(x-۱)}$ را حساب می‌کنیم:

$$x-۱>۰ \Rightarrow x>۱$$

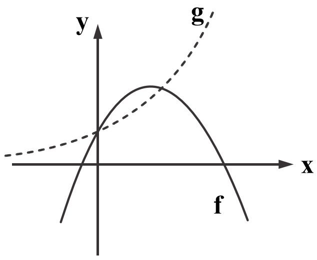
حال تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=۳^{\log_۳(x-۱)}=x-۱$$



(نصیری) (پایه یازدهم ـ لگاریتم ـ نمودار لگاریتم)

۱۹- گزینه «۴» ـ سهمی دارای رأسی به مختصات $(۱,۲)$ و عرض‌ازمبدأ ۱ است. حال نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، f و g در دو نقطه متقاطع‌اند یکی $x=۰$ و دیگری هم $x=۱$ (البته $x=۱$ به طور اتفاقی به دست آمد)



(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع نمایی ـ رسم تابع نمایی)

۲۰- گزینه «۳» ـ چون $A\in f$ است پس:

$$y_A=\log_۳ ۳=۱ \Rightarrow A(۳,۱)$$

نقطه B روی وارون f قرار دارد و در نتیجه $B(۱,۳)$ خواهد بود.

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۱-۳)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ لگاریتم ـ نمودار لگاریتمی)

۲۱- گزینه «۱» ـ

$$\log_۳ x(x+۱)=۲ \Rightarrow x^۲+x=۹$$

$$\log_{(x^۲+x-۷)}(x^۲+x+۷)=\log_۲ ۱۶=۴$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ لگاریتم ـ معادله لگاریتمی)

۲۲- گزینه «۳» ـ

$$\xrightarrow{f(t)=3A_0} 3A_0 = A_0 \times 2^{0/05t} \Rightarrow 3 = 2^{0/05t} \Rightarrow 0/05t = \log_2 3 \Rightarrow t = \frac{1/58}{0/05} = 31/6$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی)

۲۳- گزینه «۴» ـ

$$f(0) = 3\times 2^{b} = 24 \Rightarrow 2^{b} = 8 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = 3\times 2^{ax+3}$$

$$f(-1) = 3\times 2^{3-a} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2^{3-a} = 2^{-1} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = 3\times 2^{4x+3}$$

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3\times 2^{4x+3} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2^{4x+3} = 2^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 4x+3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4x = -\frac{7}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{8}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع نمایی ـ معادله نمایی)

۲۴- گزینه «۱» ـ

$$\log E = 11/8 + 1/5M \Rightarrow \log 10^{k} = 11/8 + 1/5\times 5 \Rightarrow k = 11/8 + 7/5 = 19/3$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ لگاریتم ـ کاربرد لگاریتم)

۲۵- گزینه «۴» ـ چون تابع نمایی است پس:

$$m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 1, -2 \begin{cases} m = 1 \Rightarrow f(x) = (\frac{1-3}{1-5})^x = (\frac{1}{2})^x \Rightarrow f(-1) = 2 \\ m = -2 \Rightarrow f(x) = (\frac{-2-3}{-2-5})^x = (\frac{5}{7})^x \Rightarrow f(-1) = \frac{7}{5} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع نمایی ـ نمودار تابع نمایی)