ریاضیات

۱- گزینه «۱» ــ

$$۴^{۲x}+۴^{۲x}=\sqrt[۳]{۲} \Rightarrow ۲\times ۴^{۲x}=۲^{\frac{۱}{۳}}=۲^{۱+۴x}=۲^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow ۱+۴x=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۴x=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow x=-\frac{۱}{۶}$$

$$a=\log_{۳}(۶x+۱۰)=\log_{۳}(۶\times\frac{-۱}{۶}+۱۰)=\log_{۳} ۹=۲$$

$$b=\log_{۶}(-x)=\log_{۶}\frac{۱}{۶}=-۱ \Rightarrow a+b=۲-۱=۱$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ معادله نمایی ــ لگاریتم) (آسان)

۲- گزینه «۲» ــ

$$\log\frac{x^{۳}-۸}{x-۲}=\log ۵ \Rightarrow x^{۲}+۲x+۴=۵ \Rightarrow x^{۲}+۲x=۱$$

$$\log(x(x+۲)+۹۹)=\log(x^{۲}+۲x+۹۹)=\log(۱+۹۹)=\log(۱۰۰)=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ لگاریتم ــ معادله لگاریتمی) (متوسط)

۳- گزینه «۳» ــ

$$b-x=۰ \xrightarrow{x=۱} b-۱=۰ \Rightarrow b=۱$$

$$f(۰)=۳ \Rightarrow a-\log_{c} ۱=۳ \Rightarrow a=۳$$

$$f(-۷)=۰ \Rightarrow ۳-\log_{c} ۸=۰ \Rightarrow ۸=c^{۳} \Rightarrow c=۲$$

$$a+b+c=۱+۳+۲=۶$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ نمودار تابع لگاریتمی) (متوسط)

۴- گزینه «۱» ــ

$$\frac{x^{۲}-۴x+۴}{x+۳}>۰ \Rightarrow \frac{(x-۲)^{۲}}{x+۳}>۰ \xrightarrow{x\neq ۲} x+۳>۰ \Rightarrow x>-۳\,,\, x\neq ۲ \Rightarrow D=(-۳\,,۲)\cup(۲\,,+\infty)$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ لگاریتم ــ دامنه تابع لگاریتمی) (متوسط)

۵- گزینه «۱» ــ

$$۲^{a}=b \Rightarrow a=\log_{۲} b$$

$$\log_{۲} ۸b=\log_{۲} ۸+\log_{۲} b=۳+a$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ لگاریتم ــ خواص لگاریتم) (آسان)

۶- گزینه «۱» ــ با فرض $g(x)=x^{۴}$:

$$f(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x) \Rightarrow f(x)=۴x^{۳} \Rightarrow f'(x)=۱۲x^{۲} \Rightarrow f'(۲)=۱۲\times ۴=۴۸$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ مشتق ــ تعریف مشتق) (آسان)

۷- گزینه «۴» ــ شیب خط مماس در نقاط A، B و C به‌ترتیب منفی، صفر و مثبت است، اما دقت کنید که اندازه شیب در نقطه A از اندازه شیب در نقطه C بیش‌تر است، پس $|f'(x_A)|>f'(x_C)$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ــ مشتق – مفهوم خط مماس) (آسان)

۸- گزینه «۳» ــ تابع $f(x)$ در نقاط غیرصحیح پیوسته و مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $۲x[x]$ است، زیرا در همسایگی اعداد صحیح $[x]$ حکم یک عدد را دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ــ مشتق ــ مشتق‌پذیری) (دشوار)

۹- گزینه «۲» ــ

$$f'(x)=\frac{۳x^{۲}(x-۱)-x^{۳}}{(x-۱)^{۲}}+\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{(۴x)^{۲}}} \Rightarrow f'(۲)=\frac{۱۲\times ۱-۸}{۱}+\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۸^{۲}}}=۴+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۳}{۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ مشتق ــ قوانین مشتق‌گیری) (آسان)

۱۰- گزینه «۳» ـ

$$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=(ax^2+bx+c)+(2ax+b)+2a$$

$$g(x)=ax^2+(b+2a)x+c+b+2a$$

اگر $g(x)$ را معادل با x^2 در نظر بگیریم:

$$\begin{cases}a=1\\ b+2a=0\xrightarrow{a=1}b=-2\\ c+b+2a=0\xrightarrow{a=1,b=-2}c=0\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^2-2x\Rightarrow f(-1)=3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق دوم) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» ـ f در $x=2$ ناپیوسته است و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است و همچنین در $x=1$ (نقطه گوشه‌ای) مشتق ندارد، پس مجموعاً در دو نقطه $\{1, 2\}$ مشتق ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$g(x)=f(2x+1)=|2x|[-2(x+1)]$$

تنها $x=0$ نقطه‌ای برای $g(x)$ است که g در آن پیوسته است، اما مشتق چپ و راست آن نابرابر است که همین نقطه را نقطه گوشه‌ای می‌نامیم.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» ـ

$$f(t)=0/6\Rightarrow\frac{3}{1+2\sqrt[3]{t}}=\frac{6}{10}\Rightarrow 1+2\sqrt[3]{t}=5\Rightarrow t=8$$

$$f'(t)=\frac{-2\times\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\times 3}{(1+2\sqrt[3]{t})^2}\Rightarrow f'(8)=\frac{-\frac{2}{4}}{(1+4)^2}=\frac{-\frac{1}{2}}{25}=\frac{-1}{50}=-0/02$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ لحظه‌ای) (متوسط)

۱۴- گزینه «۲» ـ

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\Rightarrow 3c^2+4c=\frac{(8+8)-(1+2)}{1}\Rightarrow 3c^2+4c=13\Rightarrow 3c^2+4c-13=0$$

$$\Rightarrow c=\frac{-2\pm\sqrt{4+39}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{43}}{3}\xrightarrow{c\in(1,2)}c=\frac{\sqrt{43}-2}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ متوسط و لحظه‌ای) (متوسط)

۱۵- گزینه «۲» ـ

$$f(4-\sqrt{x})=\frac{x}{1+x}\xrightarrow{x=4}f(2)=\frac{4}{5}$$

$$f(4-\sqrt{x})=\frac{x}{1+x}\Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(4-\sqrt{x})=\frac{1+x-x}{(1+x)^2}\xrightarrow{x=4}-\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{25}\Rightarrow f'(2)=-\frac{4}{25}$$

$$f(2)f'(2)=\frac{4}{5}\times\frac{-4}{25}=\frac{-16}{125}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌گیری ترکیب توابع) (متوسط)

۱۶- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=y=x^2-6x\xrightarrow{+9}y+9=(x-3)^2\xrightarrow{x\geq 3}x=3+\sqrt{y+9}\Rightarrow f^{-1}(x)=3+\sqrt{x+9}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+9}}\Rightarrow (f^{-1})'(-8)=\frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (دشوار)

۱۷- گزینه «۳» ـ خواسته مسئله $f'(1)$ است.

$$f'(x)=3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=3+\frac{1}{2}=3/5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (آسان)

۱۸- گزینه «۲» ـ

$$y = ۲\sqrt[۳]{۱-x^۲} \Rightarrow y^۳ = ۸(۱-x^۲) \Rightarrow ۳y^۲y' = -۱۶x \Rightarrow y'y^۲ = -\frac{۱۶}{۳}x$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق تابع مرکب) (متوسط)

۱۹- گزینه «۴» ـ این تابع در صفرهای زیر رادیکال مشتق ندارد.

$$x^۳ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۲-۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۱, -۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۲۰- گزینه «۳» ـ شیب خط گذرا از M و N را برابر مشتق تابع قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{۰-(-۱)}{۳-۲} = ۱ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲x + a = ۱ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲x + a - ۱ = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(۳)(a-۱) = ۰ \Rightarrow a - ۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = \frac{۴}{۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس) (متوسط)

۲۱- گزینه «۱» ـ

$$uv = (\sqrt{x+۲} - \sqrt{x+۱})^۶ (\sqrt{x+۲} + \sqrt{x+۱})^۵ = \sqrt{x+۲} - \sqrt{x+۱}$$

$$(uv)' = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} - \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} \xrightarrow{x=۰} \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱-\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow (uv)' = \frac{\sqrt{۲}-۲}{۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (متوسط)

۲۲- گزینه «۱» ـ

$$f(x) = (\underbrace{x^۴ - ۸x}_{H(x)})\log_۲ x \Rightarrow H'(x) = (۴x^۳ - ۸)$$

چون $H(x)$ عامل صفرکننده و پیوسته برای $f(x)$ است، پس:

$$f'(۲) = H'(۲)\log_۲ ۲ = ۴ \times ۸ - ۸ = ۲۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (آسان)

۲۳- گزینه «۳» ـ تابع f در بازه $[۱, ۲)$ مشتق‌پذیر است، زیرا در این بازه پیوسته است، ضمناً مقدار مشتق آن صفر خواهد بود.

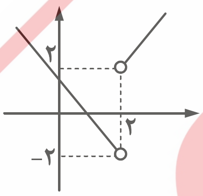
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۲۴- گزینه «۱» ـ دامنه تابع $D_f = [۱, ۴]$ است.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}} + \frac{-۱}{۲\sqrt{۴-x}} \Rightarrow D_{f'} = (۱, ۴) \Rightarrow b - a = ۴ - ۱ = ۳$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ دامنه مشتق) (متوسط)

۲۵- گزینه «۳» ـ تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست.



$$f(x) = \begin{cases} x(x-۲) & x \geq ۲ \\ x(۲-x) & x < ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۲ & x > ۲ \\ ۲ - ۲x & x < ۲ \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ نمودار مشتق) (دشوار)