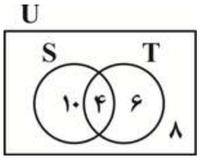
حسابان

۱- گزینه «۲» ـ

$$(۱,۴)\subset(۳x-۱,۶x+۱)\ \Rightarrow\ \begin{cases}۶x+۱\ge ۴\ \Rightarrow\ x\ge \frac{۱}{۲}\\ ۳x-۱\le ۱\ \Rightarrow\ x\le \frac{۲}{۳}\end{cases}\xrightarrow{\ \cap\ }\ x\in[\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳}]$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ زیرمجموعه)

۲- گزینه «۳» ـ مجموعه S را برای گروه سرود و مجموعه T را برای تئاتر در نظر می‌گیریم و نمودار زیر را تنظیم می‌کنیم. چون $n(S\cap T)=۴$ است می‌توان تعداد عضوهای دو مجموعه را به تفکیک بنویسیم و به راحتی معلوم می‌شود که ۸ نفر عضو هیچ گروهی نیستند.



(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ مجموعه متناهی)

۳- گزینه «۴» ـ تعداد دایره‌ها برابر مجموع الگوی مربعی و مثلثی است.

$$t_n=n^۲+\frac{n(n+۱)}{۲}\ \Rightarrow\ t_{۲۰}=۴۰۰+۲۱۰=۶۱۰$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ الگوی مربعی و مثلثی)

۴- گزینه «۳» ـ اگر قدر نسبت را r فرض کنیم، دنباله به صورت زیر است:

$$۲\,,\,۲r\,,\,۲r^۲\,,\,۲r^۳\,,\,۲r^۴$$

$$۲r+۲r^۲+۲r^۳=-۱۲\ \Rightarrow\ r^۳+r^۲+r+۶=۰\ \Rightarrow\ (r^۳+۸)+(r^۲-۴)+(r+۲)=۰$$

$$(r+۲)(r^۲-۲r+۴)+(r+۲)(r-۲)+(r+۲)=۰$$

$$(r+۲)(r^۲-۲r+۴+r-۲+۱)=۰\ \Rightarrow\ (r+۲)(r^۲-r+۳)=۰\ \Rightarrow\ r=-۲$$

جمله وسط $۲r^۲$ است که مقدار آن ۸ می‌شود. (نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس چهارم ـ دنباله هندسی)

۵- گزینه «۴» ـ

$$t_۱+t_۲+\cdots+t_{۱۰۰}=(۱+۱)+(۲+۲)+(۳+۳)+\cdots+(۵۰+۵۰)$$

$$=۲(۱+۲+۳+\cdots+۵۰)=۲\times\frac{۵۰\times ۵۱}{۲}=۲۵۵۰$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ دنباله)

۶- گزینه «۱» ـ

$$S_n=\frac{(۲^n-۱)(۲^n+۱)}{۲^n+۱}=۲^n-۱\ \Rightarrow\ \begin{cases}S_۱=۲^۱-۱=۱=t_۱\\ S_۲=۲^۲-۱=۳=t_۱+t_۲\ \Rightarrow\ t_۲=۲\end{cases}$$

$$r=\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{۲}{۱}=۲\ ،\ t_۱+r=۲+۱=۳$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ مجموع دنباله هندسی)

۷- گزینه «۲» ـ تعداد جملات n تا است پس:

$$\begin{cases}t_۱+t_۲=۵\\ t_n+t_{n-۱}=۱۱۳\end{cases}\xrightarrow{\ +\ }\ (t_۱+t_n)+(t_۲+t_{n-۱})=۱۱۸\qquad(۱)$$

دقت کنید که $S_n=\frac{n}{۲}(t_۱+t_n)$ و همچنین $t_۱+t_n=t_۲+t_{n-۱}$ است. پس رابطه (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$(۱):\frac{۲}{n}S_n+\frac{۲}{n}S_n=۱۱۸\ \xrightarrow{S_n=۵۹۰}\ \frac{۴}{n}\times ۵۹۰=۱۱۸$$

$$\Rightarrow\ n=\frac{۴\times ۵۹۰}{۱۱۸}=\frac{۴\times ۵۹۰}{۵۹\times ۲}=۲۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ مجموع دنباله حسابی)

۸- گزینه «۴» ــ چون A در ناحیه اول است پس طول و عرض آن مثبت است و از طرفی بالای خط $y = x$ قرار دارد در نتیجه عــرض آن بیشــتر از طولش می‌باشد.

$$m-1>2m+1>0 \Rightarrow \begin{cases} m-1>2m+1 \Rightarrow m<-2 \\ 2m+1>0 \Rightarrow m>-\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس پنجم ــ محورهای مختصات)

۹- گزینه «۲» ــ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & a & 1 \end{vmatrix} = (-2-0)+(0+6)+(3-a)=7-a$$

$$\frac{1}{2}|7-a|=\frac{5}{2} \Rightarrow |7-a|=5 \Rightarrow \begin{cases} 7-a=5 \Rightarrow a=2 \\ 7-a=-5 \Rightarrow a=12 \end{cases}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس پنجم ــ مساحت مثلث)

۱۰- گزینه «۳» ــ دو خط $2x+3y=8$ و $3x-2y=-1$ برهم عمودند. پس مثلث قائم‌الزاویه است و محل برخورد دو خط قائم برابر محل برخــورد عمود منصف‌هاست.

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+6y=16 \\ 9x-6y=-3 \end{cases} \xrightarrow{+} 13x=13 \Rightarrow x=1, y=2$$

پس محل تقاطع عمود منصف‌ها نقطه $(1, 2)$ است. (نصیری) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس پنجم ــ عمودمنصف)

۱۱- گزینه «۳» ــ چون A رأس سهمی است پس $f'(3)=0$ است یعنی مماس در A افقی است. از طرفی سهمی یک تابع متقارن است پس دو نقطه با طول‌های $\frac{7}{4}$ و a نسبت به ۳ متقارن هستند.

$$\frac{7}{4}+a=2\times 3 \Rightarrow a=6-\frac{7}{4}=\frac{24-7}{4}=\frac{17}{4}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس اول ــ مفهوم مماس)

۱۲- گزینه «۱» ــ با توجه به تعریف مشتق $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ پس رابطه داده شده به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$(f'(2))^2=4f'(2)-4 \Rightarrow (f'(2))^2-4f'(2)+4=0 \Rightarrow (f'(2)-2)^2=0 \Rightarrow f'(2)=2$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{2x-4}=\frac{1}{2}f'(2)=\frac{1}{2}\times 2=1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس اول ــ تعریف مشتق)

۱۳- گزینه «۳» ــ مختصات ابتدا و انتهای تابع و شیب خط واصل آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$A(4, 0) ، B(9, 1) \Rightarrow m_{AB}=\frac{1-0}{9-4}=\frac{1}{5}$$

$$f'(x)=\frac{2+8}{(x+1)^2}=\frac{10}{(x+1)^2}$$

چون خط قاطع با خط مماس در c با هم موازی‌اند، پس:

$$f'(c)=\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{10}{(c+1)^2}=\frac{1}{5} \Rightarrow (c+1)^2=50$$

$$\Rightarrow c+1=\pm 5\sqrt{2} \xrightarrow{4<c<9} c=5\sqrt{2}-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس اول ــ خط مماس)

۱۴- گزینه «۱» ــ

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4(1+h)-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4h+2}{h}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس دوم ــ مشتق‌پذیری)

۱۵- گزینه «۳» ـ تابع $h(x)=f^{۲}(x)+g^{۲}(x)$ را با دامنه $[۱,۱۷]$ در نظر می‌گیریم:

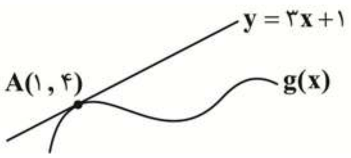
$$h(x)=(\sqrt[۴]{x-۱})^{۲}+(\sqrt{۴-\sqrt{x-۱}})^{۲}=\sqrt{x-۱}+۴-\sqrt{x-۱}=۴$$

$$\Rightarrow\ f^{۲}(x)+g^{۲}(x)=۴\ \Rightarrow\ ۲f(x)f'(x)+۲g(x)g'(x)=۰$$

$$\xrightarrow{x=۱۰}\ f(۱۰)f'(۱۰)+g(۱۰)g'(۱۰)=۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ تابع مشتق)

۱۶- گزینه «۱» ـ چون خط $y=۳x+۱$ در $x=۱$ بر تابع g مماس است پس $\begin{cases}g(۱)=۴\\ g'(۱)=۳\end{cases}$ خواهد بود. از طرفی $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=۵$ است، پس $f'(۴)=۵$ می‌باشد.



$$(fog)'(۱)=g'(۱)f'(g(۱))=۳f'(۴)=۳\times ۵=۱۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق تابع مرکب)

۱۷- گزینه «۲» ـ

$$y=ax^{۲}+bx+c\ \Rightarrow\ y'=۲ax+b\ \Rightarrow\ y''=۲a$$

$$y+xy'+y''+x^{۲}+x=ax^{۲}+bx+c+x(۲ax+b)+۲a+x^{۲}+x\equiv ۰$$

$$\Rightarrow\ (a+۲a+۱)x^{۲}+(b+b+۱)x+c+۲a\equiv ۰$$

$$\Rightarrow\ (۱+۳a)x^{۲}+(۱+۲b)x+(c+۲a)\equiv ۰$$

$$\begin{cases}۱+۳a=۰\ \Rightarrow\ a=\dfrac{-۱}{۳}\\ ۱+۲b=۰\ \Rightarrow\ b=\dfrac{-۱}{۲}\\ c+۲a=۰\ \Rightarrow\ c=-۲a=\dfrac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$f(۱)=a+b+c=\frac{-۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۶}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق مرتبه دوم)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$A=\lim_{x\to ۱}\frac{f^{۲}(x)-f^{۲}(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\lim_{x\to ۱}(f(x)+f(۱))=۲f(۱)f'(۱)$$

$$f(۱)=۱\ \Rightarrow\ A=۲f'(۱)$$

$$f(x)=\underbrace{(x^{۳}+۲x^{۲}-۳)}_{g(x)}\tan^{۳}\frac{\pi x}{۴}+۱$$

چون $g(۱)=۰$ و $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است پس:

$$f'(۱)=g'(۱)\tan\frac{\pi\times ۱}{۴}=(۳+۴)\times ۱=۷\ \Rightarrow\ A=۲\times ۷=۱۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق مثلثاتی)

۱۹- گزینه «۳» ـ ضابطه تابع $f(x)$ که معلوم است. تابع g یک تابع خطی است که از دو نقطه $A(۴ , ۰)$, $B(a , ۵)$ عبور می‌کند. چون B روی f نیـز قرار دارد با جایگذاری B در f مقدار a برابر ۱- به‌دست می‌آید. پس تابع g از دو نقطه $A(۴ , ۰)$ و $B(-۱ , ۵)$ عبور می‌کند.

$$m_{AB} = \frac{۵-۰}{-۱-۴} = -۱ \Rightarrow AB : y - ۰ = -۱(x-۴) = ۴ - x$$

$$h(x) = f(x)g(x) = (۴-x)(x^۲ - ۴x)$$

$$h'(x) = -۱(x^۲ - ۴x) + (۲x-۴)(۴-x)$$

$$h'(-۱) = -۱(۱+۴) + (-۲-۴)(۴+۱) = -۵ - ۳۰ = -۳۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ تابع مشتق)

۲۰- گزینه «۳» ـ در همسایگی $x = ۹$ تابع را می‌توانیم به صورت توانی تبدیل کنیم:

$$f(x) = x(x-۱)^{\frac{-۲}{۳}} \Rightarrow f'(x) = (x-۱)^{\frac{-۲}{۳}} - \frac{۲}{۳}(x-۱)^{\frac{-۵}{۳}}x$$

$$f'(۹) = ۸^{\frac{-۲}{۳}} - \frac{۲}{۳} \times ۸^{\frac{-۵}{۳}} \times ۹ = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۸^۲}} - \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{۸^۵}} \times ۹ = \frac{۱}{۴} - \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳۲} \times ۹ = \frac{۱}{۴} - \frac{۳}{۱۶} = \frac{۱}{۱۶}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ آهنگ تغییر)