حسابان

۱- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{(x-۲)(x+۲)}=۴ \Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x+۲}=۴ \Rightarrow f'(۲)\times\frac{۱}{۴}=۴\Rightarrow f'(۲)=۱۶$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}=-f'(۲)=-۱۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق)

۲- گزینه «۱» ـ اگر از چپ به راست خطوط مماس را رسم کنیم شیب آنها افزایش می‌یابد، صفر می‌شود و به افزایش خود ادامه می‌دهد مجدداً صفر می‌شود و در نهایت کاهش می‌یابد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ شیب)

۳- گزینه «۴» ـ چون $\lim_{x\to -۴}\frac{f(x)-۵}{x+۴}=۸$ پس $f(-۴)=۵$ و $f'(-۴)=۸$ حال می‌توان نتیجه گرفت که نقطه $A(-۴,۵)$ متعلق به f و شیب خط مماس برابر ۸ است حال می‌توان معادله خط مماس را از نقطه A نوشت.

$$y-۵=۸(x+۴) \Rightarrow y=۸x+۳۷ \Rightarrow \text{عرض از مبدا}=۳۷$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس)

۴- گزینه «۳» ـ خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطه $A(۱,۲)$ از مبدأ عبور می‌کند پس خط مماس از دو نقطه $(۰,۰)$ و $(۱,۲)$ عبور می‌کند و درنتیجه شیب آن برابر است با:

$$\frac{۲-۰}{۱-۰}=۲ \Rightarrow f'(۱)=۲$$

از طرفی $f(۱)=۲$ است پس $f(۱)f'(۱)=۴$ می‌باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس)

۵- گزینه «۲» ـ

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}+\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{x+۱}=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}-\frac{۱}{۲(x+۱)\sqrt{x+۱}} \Rightarrow f'(۰)=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ لحظه‌ای)

۶- گزینه «۴» ـ ابتدا ریشه‌های زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم. (یکی از ریشه‌ها $x=۱$ است.)

$$x^۳-۴x^۲+۳=۰ \Rightarrow (x-۱)(x^۲-۳x-۳)=۰$$

یکی از ریشه‌ها $x=۱$ و مجموع دو ریشه دیگر برابر مجموع ریشه‌های معادله $x^۲-۳x-۳=۰$ است پس $\alpha+\beta=۳$ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری)

۷- گزینه «۳» ـ طبق تعریف مشتق، $\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ برابر با مشتق چپ f در $x=۲$ است. تابع در همسایگی چپ $x=۲$ به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$x\le ۲ \Rightarrow f(x)=x^۲-۲x+۴ \Rightarrow f'(x)=۲x-۲\Rightarrow f'_-(۲)=۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق یک طرفه)

۸- گزینه «۱» ـ تابع f در نقطه C به دلیل ناپیوستگی و در نقطه D به دلیل شکسته (گوشه‌دار) بودن مشتق‌پذیر نیست.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری)

۹- گزینه «۳» ـ

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)+g'(x)f(x)}{f(x)g(x)}=\frac{(fg)'(x)}{(fg)(x)}=\frac{(x^۳)'}{x^۳}=\frac{۳x^۲}{x^۳}=\frac{۳}{x}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تابع مشتق)

۱۰- گزینه «۱» ـ $(۱,-۱)$ نقطه مماس

$$f'(x)=\frac{۳(۲x^۲+۳x+۲)-(۴x+۳)(۳x+۴)}{(۲x^۲+۳x+۲)^۲} \Rightarrow f'(-۱)=\frac{۳-(-۱)}{۱}=۴=m_{\text{مماس}}$$

معادله مماس: $y-۱=۴(x+۱) \Rightarrow y=۴x+۵$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس)

۱۱- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=۶ \Rightarrow f'(۳)=۶$$

$$(f(\sqrt{۴-۵x}))'=-۵\times\frac{۱}{۲\sqrt{۴-۵x}}\times f'(\sqrt{۴-۵x}) \xrightarrow{x=-۱} -۵\times\frac{۱}{۶}\times f'(۳)=-\frac{۵}{۶}\times۶=-۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تابع مشتق و تعریف مشتق)

۱۲- گزینه «۴» ـ

$$y=\sin(۴x+x)=\sin ۵x \Rightarrow y'=۵\cos ۵x$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق تابع مثلثاتی)

۱۳- گزینه «۱» ـ

$$۷n(A\cap B)-n(B)=n(A) \Rightarrow n(A)+n(B)=۷n(A\cap B)$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷n(A\cap B)-n(A\cap B)=۶n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{۳n(A\cap B)}=\frac{۶n(A\cap B)}{۳n(A\cap B)}=۲$$

(نصیری) (پایه دهم ـ مجموعه ـ تعداد اعضای مجموعه)

۱۴- گزینه «۴» ـ

مجموع پنج جمله اول: $a_۱+a_۲+a_۳+a_۴+a_۵=۵a_۱+۱۰d$

مجموع پنج جمله آخر: $a_{۱۶}+a_{۱۷}+a_{۱۸}+a_{۱۹}+a_{۲۰}=۵a_۱+۸۵d$

$$\Rightarrow ۵a_۱+۱۰d=۲(۵a_۱+۸۵d) \Rightarrow ۵a_۱+۱۰d=۱۰a_۱+۱۷۰d \Rightarrow ۵a_۱+۱۶۰d=۰ \xrightarrow{\div ۵} a_۱+۳۲d=۰ \Rightarrow a_{۳۳}=۰$$

(نصیری) (پایه دهم ـ دنباله حسابی ـ رابطه اصلی)

۱۵- گزینه «۲» ـ اگر تعداد جملات را n در نظر بگیریم آنگاه:

$$\begin{cases}a_n+a_{n-۱}+a_{n-۲}+a_{n-۳}+a_{n-۴}=۹۵۵\\ a_۱+a_۲+a_۳+a_۴+a_۵=۵۵\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۵a_۱+(n-۱+n-۲+n-۳+n-۴+n-۵)d=۹۵۵\\ ۵a_۱+(۱+۲+۳+۴)d=۵۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۵a_۱+(۵n-۱۵)d=۹۵۵ \Rightarrow a_۱+(n-۳)d=۱۹۱\\ ۵a_۱+۱۰d=۵۵ \Rightarrow a_۱+۲d=۱۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} ۲a_۱+(n-۱)d=۱۹۶ \Rightarrow a_۱+a_n=۲۰۲$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n) \Rightarrow S_{۵۰}=\frac{۵۰}{۲}\times۲۰۲=۵۰\times۱۰۱=۵۰۵۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ دنباله حسابی ـ مجموع جملات دنباله حسابی)

۱۶- گزینه «۲» ـ دو خط عمود بر هم $L: ۳x+۲y=a$ و $L': ۲x-۳y=۲$، اضلاع مربع هستند نقطه A روی L' قرار ندارد (در L' صدق نمی‌کند) و اگر بر روی L قرار داشته باشد، $a=۱۰$ به دست می‌آید که طبق فرض مسئله $a\neq ۱۰$ است. بنابراین نقطه A، بر روی هیچ یک از دو خط L و L' قرار ندارند، پس فاصله این نقطه از هر دو خط با هم برابر و برابر ضلع مربع خواهد بود:

فاصله A از L: $AH=\frac{|۳(۴)+۲(-۱)-a|}{\sqrt{۹+۴}}=\frac{|۱۰-a|}{\sqrt{۱۳}}$

فاصله A از L': $AH'=\frac{|۲(۴)-۳(-۱)-۲|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{۹}{\sqrt{۱۳}}$

$$AH=AH' \Rightarrow |۱۰-a|=۹ \Rightarrow \begin{cases}۱۰-a=۹ \Rightarrow a=۱\\ ۱۰-a=-۹ \Rightarrow a=۱۹\end{cases}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه تحلیلی ـ فاصله دو خط موازی)