حسابان

۱- گزینه «۴» ـ

$$f'(x)=\frac{-\pi}{x^{۲}}(۱+\tan^{۲}\frac{\pi}{x})+\frac{\frac{۲\pi}{x^{۲}}\cos\frac{۲\pi}{x}}{\sin^{۲}\frac{۲\pi}{x}}$$

$$f'(۴)=\frac{-\pi}{۱۶}(۱+۱)+۰=-\frac{\pi}{۸}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق مثلثاتی) (آسان)

۲- گزینه «۱» ـ جملات این دنباله هر چهار دفعه یک بار تکرار می‌شود و مجموع هر چهار جمله صفر است.

$$S=(t_{۱}+t_{۲}+t_{۳}+t_{۴})+\cdots+(t_{۹۳}+t_{۹۴}+t_{۹۵}+t_{۹۶})+t_{۹۷}$$

$$S=۰\times ۲۴+t_{۹۷}=t_{۱}=۰$$

(نصیری) (پایه دهم ـ دنباله) (دشوار)

۳- گزینه «۱» ـ

$$\frac{S_{۹}}{S_{۳}}=۷\Rightarrow\frac{\frac{a(۱-q^{۹})}{۱-q}}{\frac{a(۱-q^{۳})}{۱-q}}=۷\Rightarrow\frac{۱-q^{۹}}{۱-q^{۳}}=۷\xrightarrow{q\neq ۱}\frac{(۱-q^{۳})(۱+q^{۳}+q^{۶})}{۱-q^{۳}}=۷\Rightarrow q^{۶}+q^{۳}-۶=۰$$

$$\Rightarrow (q^{۳}+۳)(q^{۳}-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}q^{۳}=۲\\ q^{۳}=-۳\end{cases}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ دنباله هندسی ـ مجموع جملات دنباله هندسی) (متوسط)

۴- گزینه «۱» ـ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است.

$$a=|AB|=\sqrt{۹+(m-۱)^{۲}}$$

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۳}\Rightarrow a^{۲}=۱۰\Rightarrow ۹+(m-۱)^{۲}=۱۰\Rightarrow (m-۱)^{۲}=۱\Rightarrow\begin{cases}m=۰\\ m=۲\end{cases}$$

مجموع مقادیر m برابر ۲ خواهد شد. (نصیری) (پایه یازدهم ـ جبر و معادله ـ هندسه تحلیلی ـ فاصله دو نقطه) (متوسط)

۵- گزینه «۴» ـ کافی است معادله دو تا از ارتفاع‌ها را با هم قطع دهیم:

$$m_{BC}=\frac{۵+۲}{۱-۳}=-\frac{۷}{۲}\Rightarrow m_{AH}=\frac{۲}{۷}$$

$$AH: y-۱=\frac{۲}{۷}(x-۲)\Rightarrow ۷y-۷=۲x-۴\Rightarrow ۷y-۲x=۳$$

$$m_{AB}=\frac{-۲-۱}{۳-۲}=-۳\Rightarrow m_{CH'}=\frac{۱}{۳}$$

$$CH': y-۵=\frac{۱}{۳}(x-۱)\Rightarrow ۳y-۱۵=x-۱\Rightarrow x-۳y=-۱۴$$

حال دو ارتفاع را با هم قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}۷y-۲x=۳\\ ۲\,(x-۳y=-۱۴)\end{cases}\xrightarrow{+} y=-۲۵\ ,\ x=-۸۹$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ جبر و معادله ـ هندسه تحلیلی) (دشوار)

۶- گزینه «۱» ـ با فرض $g(x)=x^{۴}$:

$$f(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)\Rightarrow f(x)=۴x^{۳}\Rightarrow f'(x)=۱۲x^{۲}\Rightarrow f'(۲)=۱۲\times ۴=۴۸$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق) (آسان)

۷- گزینه «۳» ـ تابع $f(x)$ در نقاط غیرصحیح پیوسته و مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $2x[x]$ است، زیرا در همسایگی اعداد صحیح $[x]$ کلمه یک عدد را دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (دشوار)

۸- گزینه «۲» ـ

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}+\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x)^2}} \Rightarrow f'(2)=\frac{12\times 1-8}{1}+\frac{4}{3\sqrt[3]{8^2}}=4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (آسان)

۹- گزینه «۳» ـ

$$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=(ax^2+bx+c)+(2ax+b)+2a$$
$$g(x)=ax^2+(b+2a)x+c+b+2a$$

اگر $g(x)$ را معادل با x^2 در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} a=1 \\ b+2a=0 \xrightarrow{a=1} b=-2 \\ c+b+2a=0 \xrightarrow{a=1,b=-2} c=0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-2x \Rightarrow f(-1)=3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق دوم) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» ـ f در $x=2$ ناپیوسته است و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است و همچنین در $x=1$ (نقطه گوشه‌ای) مشتق ندارد، پس مجموعاً در دو نقطه $\{1, 2\}$ مشتق ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۱۱- گزینه «۱» ـ

$$g(x)=f(2x+1)=|2x|[-2(x+1)]$$

تنها $x=0$ نقطه‌ای برای $g(x)$ است که g در آن پیوسته است، اما مشتق چپ و راست آن نابرابر است که همین نقطه را نقطه گوشه‌ای می‌نامیم.
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» ـ

$$f(4-\sqrt{x})=\frac{x}{1+x} \xrightarrow{x=4} f(2)=\frac{4}{5}$$
$$f(4-\sqrt{x})=\frac{x}{1+x} \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(4-\sqrt{x})=\frac{1+x-x}{(1+x)^2} \xrightarrow{x=4} -\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{25} \Rightarrow f'(2)=-\frac{4}{25}$$
$$f(2)f'(2)=\frac{4}{5}\times\frac{-4}{25}=\frac{-16}{125}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌گیری ترکیب توابع) (متوسط)

۱۳- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=y=x^2-6x \xrightarrow{+9} y+9=(x-3)^2 \xrightarrow{x\geq 3} x=3+\sqrt{y+9} \Rightarrow f^{-1}(x)=3+\sqrt{x+9}$$
$$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+9}} \Rightarrow (f^{-1})'(-8)=\frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (دشوار)

۱۴- گزینه «۲» ـ

$$y=2\sqrt[3]{1-x^2} \Rightarrow y^3=8(1-x^2) \Rightarrow 3y^2y'=-16x \Rightarrow y'y^2=-\frac{16}{3}x$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق تابع مرکب) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» ـ این تابع در صفرهای زیر رادیکال مشتق ندارد.

$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, 1, -1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۱۶- گزینه «۳» ـ شیب خط گذرا از M و N را برابر مشتق تابع قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\frac{0-(-1)}{3-2}=1 \Rightarrow 3x^2+2x+a=1 \Rightarrow 3x^2+2x+a-1=0$$
$$\Delta=0 \Rightarrow 4-4(3)(a-1)=0 \Rightarrow a-1=\frac{1}{3} \Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس) (متوسط)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$$uv = (\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۱})^{۶}(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۱})^{۵} = \sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۱}$$

$$(uv)' = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} - \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} \xrightarrow{x=۰} \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱-\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow (uv)' = \frac{\sqrt{۲}-۲}{۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق – قوانین مشتق‌گیری) (متوسط)

۱۸- گزینه «۱» ـ

$$f(x) = (\underbrace{x^{۴}-۸x}_{H(x)})\log_{۲} x \Rightarrow H'(x) = (۴x^{۳}-۸)$$

چون $H(x)$ عامل صفرکننده و پیوسته برای $f(x)$ است، پس:

$$f'(۲) = H'(۲)\log_{۲} ۲ = ۴\times ۸ - ۸ = ۲۴$$

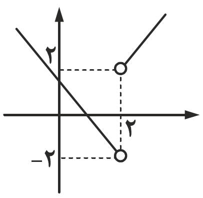
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری) (آسان)

۱۹- گزینه «۳» ـ تابع f در بازه $[۱,۲]$ مشتق‌پذیر است، زیرا در این بازه پیوسته است، ضمناً مقدار مشتق آن صفر خواهد بود.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (آسان)

۲۰- گزینه «۳» ـ تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f(x) = \begin{cases} x(x-۲) & x \geq ۲ \\ x(۲-x) & x < ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x-۲ & x > ۲ \\ ۲-۲x & x < ۲ \end{cases}$$



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ نمودار مشتق) (دشوار)