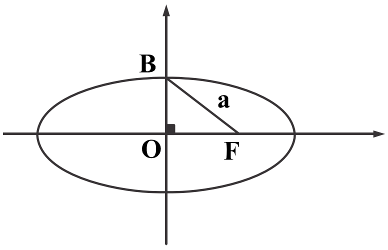
## هندسه

۱- گزینه «۲» ـ بنابر فرض مسئله $۲c = ۴\sqrt{۵}$ و $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$. می‌توان نوشت:



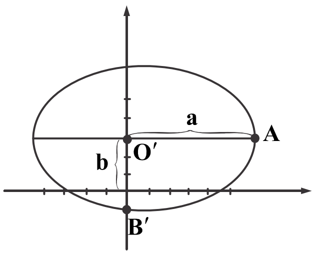

$$\begin{cases} c = ۲\sqrt{۵} \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۵}}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۳} \Rightarrow a = ۶$$

از طرف دیگر می‌دانیم $BF = a$ پس:

فاصله کانونی از یک رأس غیرکانونی $= BF = a = ۶$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی)

۲- گزینه «۱» ـ با توجه به شکل نقطه $A(۵\,,۳)$ یک سر قطر بزرگ و نقطه $B'(\circ\,,-۱)$ یک سر قطر کوچک این بیضی است. بنابراین:




$$\begin{cases} a = O'A = ۵ \\ b = O'B' = ۴ \end{cases}$$

می‌دانیم $c^۲ = a^۲ - b^۲$، پس:

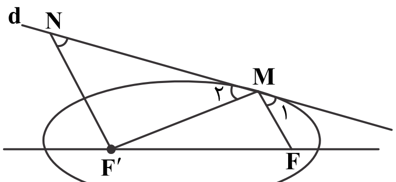
$$c = \sqrt{۲۵ - ۱۶} = ۳$$

چون دو کانون $F$ و $F'$ از مرکز $O'(\circ\,,۳)$ به اندازه $c = ۳$ در راستای محور xها راست و چپ هستند. پس:

$$F = (\circ + ۳\,,۳) = (۳\,,۳) \qquad F' = (\circ - ۳\,,۳) = (-۳\,,۳)$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی)

۳- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر ویژگی بازتابندگی بیضی $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$. از طرف دیگر $MF \parallel NF'$ و $d$ مورب است، پس طبق قضیه موازی و مورب $\hat{M}_۱ = \hat{N}$.




اکنون از دو برابری $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ و $\hat{M}_۱ = \hat{N}$ نتیجه می‌گیریم $\hat{N} = \hat{M}_۲$. یعنی مثلث $F'NM$ متساوی‌الساقین است و $F'M = F'N$. اکنون می‌نویسیم:

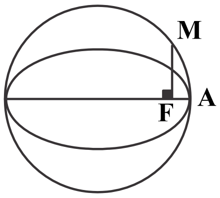
$$NF' + MF = MF' + MF = ۲a$$

از $۲c = ۴\sqrt{۵}$ و $۲b = ۸$ و رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ به دست می‌آید $a = ۶$. در نهایت به دست می‌آید:

$$NF' + MF = ۱۲$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ خاصیت انعکاسی)

۴- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر فرض مسئله از ما $MA$ را می‌خواهد. طبق مسئله ۲ صفحه ۵۷ کتاب درسی $MF = b$. همچنین $AF = a - c$.

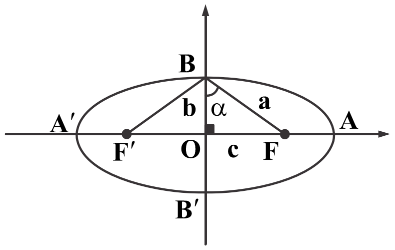



اکنون در مثلث $MAF$ بنابر قضیه فیثاغورس:

$$MA = \sqrt{MF^۲ + FA^۲} = \sqrt{b^۲ + (a-c)^۲} = \sqrt{\underbrace{b^۲ + c^۲}_{a^۲} + a^۲ - ۲ac} = \sqrt{۲a^۲ - ۲ac} = \sqrt{۲a(a-c)}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ روابط طولی)

۵- گزینه «۳» ـ به مثلث OBF نگاه کنید. $\cos\alpha = \frac{b}{a}$.

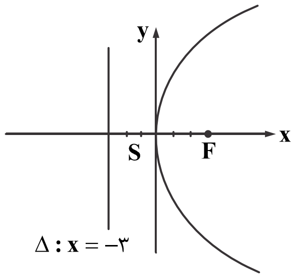



چون $\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}$، پس $\cos\alpha = \frac{۱}{۲}$. یعنی $\alpha = ۶۰^\circ$ در نتیجه:

$$F\hat{B}F' = ۲\alpha = ۱۲۰^\circ$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ روابط طولی)

۶- گزینه «۴» ـ از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر تعریف سهمی مکان هندسی مورد نظر یک سهمی به کانون F و خط هادی $\Delta$ است.

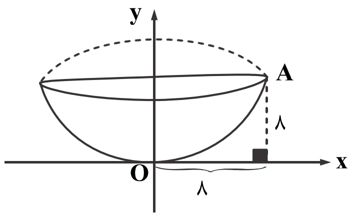



از روی شکل به سادگی دیده می‌شود $a = ۳$ و $S = (۰, ۰)$ بنابراین معادله سهمی به شکل زیر است:

$$y^۲ = ۱۲x$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ سهمی)

۷- گزینه «۲» ـ رأس آینه سهموی را در مبدا قرار می‌دهیم و آن را مانند شکل یک سهمی رو به بالا در نظر می‌گیریم. نقطه $B(۸, ۸)$ یک نقطه روی سهمی با ضابطه $x^۲ = ۴ay$ است.

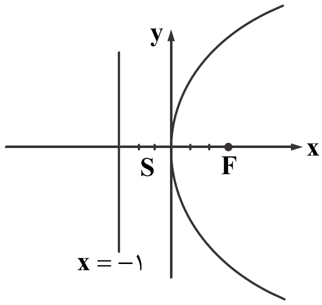



پس:

$$۸^۲ = ۴a \times ۸ \Rightarrow a = ۲$$

در نتیجه فاصله رأس تا کانون برابر $a = ۲$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ روابط طولی)

۸- گزینه «۳» ـ با تجه به اینکه مختصات رأس سهمی $۴y^۲ = mx$ نقطه $S(۰, ۰)$ است و $x = -۱$ خط هادی سهمی است، شکل سهمی به صورت زیر است. در این سهمی خط هادی $x = -a$ است. بنابراین $a = ۱$.




معادله سهمی به صورت $y^۲ = \frac{m}{۴}x$ است. بنابراین:

$$\frac{m}{۴} = ۴ \Rightarrow m = ۱۶$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ روابط طولی)

۹- گزینه «۳» ـ بررسی گزینه‌ها:

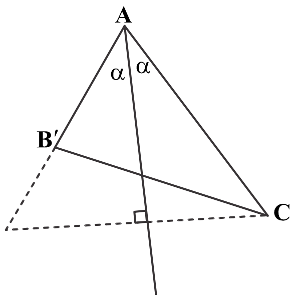
گزینه «۱»: در بازتاب هر نقطه روی محور بازتاب نقطه ثابت است.

گزینه «۲»: در دوران مرکز دوران نقطه ثابت است.

گزینه «۳»: انتقال در حالت کلی هیچ نقطه ثابتی ندارد.

گزینه ۴»: در تجانس مرکز تجانس نقطه ثابت است. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ نقطه ثابت در تبدیل‌ها)

۱۰- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. تنها زمانی می‌توان مطمئن بود ضلع AB بازتاب قسمتی از ضلع AC است که محور بازتاب را نیمساز زاویه A در نظر بگیریم.




(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ بازتاب)

۱۱- گزینه «۳» ـ چون $M'$ مجانس M است. پس:

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot OM \Rightarrow OM = \frac{۱}{k} \cdot \overrightarrow{OM'} \quad (۱)$$

چون $M''$ مجانس M است، پس:

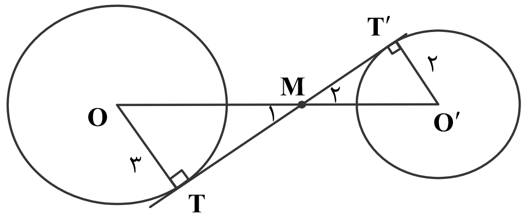
$$\overrightarrow{OM''} = k' \cdot \overrightarrow{OM} \quad (۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{OM''} = k'(\frac{۱}{k} \cdot \overrightarrow{OM'}) = \frac{k'}{k} \cdot \overrightarrow{OM'}$$

بنابراین $M''$ مجانس $M'$ در تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{k'}{k}$ است. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تجانس)

۱۲- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. (چون $OO' > r + r'$ پس دو دایره را متخارج رسم کردیم.)




نقطه M مرکز تجانس معکوس این دو دایره است. دو مثلث $MO'T'$ و MOT متشابه هستند. ( $\hat{T} = \hat{T}' = ۹۰^\circ , \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ ) اکنون نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{OT}{O'T'} \Rightarrow \frac{OM}{O'M} = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{OM}{\underbrace{OO'}_{۱۳}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow OM = \frac{۳۹}{۵} = ۷/۸$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تجانس)

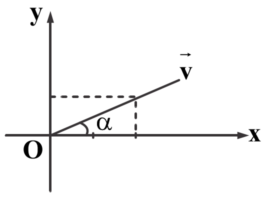
۱۳- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم. بنابر مسئله هرون برای پیدا کردن M بازتاب A نسبت به $y = ۳$ را به دست می‌آوریم. محل برخورد خط گذرنده از این نقطه و B با خط $y = ۳$ نقطه M است.

بازتاب A نسبت به خط $y = ۳$: $A' = (۲ , ۱) \Rightarrow$ معادله خط $A'B$ : $y = x - ۱$

$$\begin{cases} y = x - ۱ \\ y = ۳ \end{cases} \Rightarrow M = (۴ , ۳)$$

یعنی مجموع مختصات M برابر ۷ است. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ مسئله هرون)

۱۴- گزینه «۴» ــ بردار $\vec{v}$ را در دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم. واضح است که اگر خط و تصویر آن در یک انتقال بر هم منطبق باشند، آن‌گاه خط و بردار انتقال با هم موازی هستند.

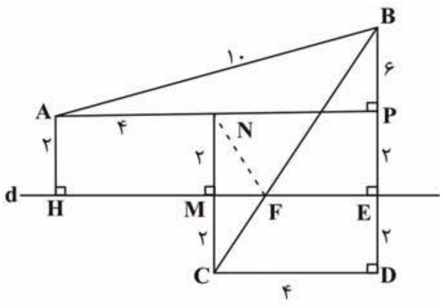



بنابراین شیب خط باید برابر $\tan\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد. اکنون می‌نویسیم:

$$۲x + my = ۴ \Rightarrow y = -\frac{۲}{m}x + \frac{۴}{m} \Rightarrow -\frac{۲}{m} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = -۴$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل دوم ــ درس اول ــ انتقال)

۱۵- گزینه «۴» ــ با توجه به مسئله حل شده در صفحه ۵۵ کتاب درسی A را با بردار به اندازه ۴ به موازات رودخانه امتداد می‌دهیم تا به نقطه N برسیم. سپس از بازتاب استفاده می‌کنیم. (یعنی مسئله، به مسئله هرون تبدیل می‌شود.) شکل زیر را ببینید در مثلث ABP بنابر قضیه فیثاغورس به دست می‌آید $AP = ۸$ به دست می‌آید. $CD = NP = AP - AN = ۸ - ۴ = ۴$ (توجه کنید که c بازتاب N نسبت به خط d است.) در مثلث BCD بنابر قضیه فیثاغورس، $BC = \sqrt{۴^۲ + ۱۰^۲} = ۲\sqrt{۲۹}$ . بنابراین طول مسیر طی شده برابر $۴ + ۲\sqrt{۲۹}$ است.




(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل دوم ــ درس دوم ــ انتقال و هرون)