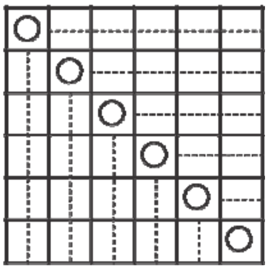
**گسسته**

۱- گزینه «۳» ــ می‌توان ۶ مهره رُخ را در ۶ خانه یک صفحه شطرنجی ۶×۶ قرار داد به‌طوری‌که شرایط مسئله تـأمین شـود. (شـکل را ببینیـد) می‌توان ثابت کرد که این تعداد کمترین مقدار ممکن هستند. اگر ۵ مهره رُخ در این صفحه قرار دهیم، آن‌گاه این ۵ مهره حـداکثر ۵ سـطر و ۵ ستون را تهدید می‌کنند، پس حداقل یک سطر مانند x و یک ستون مانند y وجود دارد که در آن مهره رُخ قرار ندارد. در نتیجه محل تقاطع این سطر و ستون توسط هیچ مهره رُخی تهدید نمی‌شود.



(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس دوم)

۲- گزینه «۲» ــ بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: این مجموعه اصلاً احاطه‌گر نیست (رأس‌های g و j احاطه نمی‌شود)

گزینه «۳»: این مجموعه هم احاطه‌گر نیست (رأس‌های c و d احاطه نمی‌شود)

گزینه «۴»: این مجموعه احاطه‌گر است، اما مجموعه احاطه‌گر مینیمم نیست.

(گزینه درست) گزینه «۲»: این مجموعه تمام رأس‌های گراف را احاطه می‌کند و مجموعه‌ای است که در بین مجموعه‌های احاطه‌گر کمترین تعداد عضو را دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس دوم)

۳- گزینه «۳» ــ بررسی تک‌تک گزینه‌ها:

گزینه «۱»: با حذف رأس‌های d و b و a مجموعه به‌صورت $\{c , e , f\}$ می‌شود و این مجموعه اصلاً احاطه‌گر نیست. (رأس a را احاطه نمی‌کند)

گزینه «۲»: با حذف رأس‌های a و c و f مجموعه به‌صورت $\{b , d , e\}$ می‌شود و این مجموعه اصلاً احاطه‌گر نیست (رأس g را احاطه نمی‌کند.)

گزینه «۳»: با حذف b و d و f مجموعه به‌صورت $\{a , c , e\}$ می‌شود، این مجموعه احاطه‌گر است. همچنین با حذف هـر یـک از رأس‌هـا دیگـر احاطگر نیست، پس احاطه‌گر مینیمال است.

گزینه «۴»: با حذف c و e مجموع به‌صورت $\{a , b , d , f\}$ می‌شود. این مجموعه احاطه‌گر است اما چون با حذف رأس f، باز هم احاطه‌گر اسـت، پس احاطه‌گر مینیمال نیست. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس دوم)

۴- گزینه «۴» ــ گزینه «۱»: تعریف کتاب درسی است. سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه «۲»: برای رأس x، $x \notin D_2$ نیست. چون $D_1 \subseteq D_2$ پس $x \notin D_1$.

از طرف دیگر $D_1$ احاطه‌گر است، پس x با رأسی مانند y از $D_1$ مجاور است. چون $D_1 \subseteq D_2$ پس $y \in D_2$، یعنی x با رأسی از $D_2$ مجاور است. در نتیجه $D_2$ احاطه‌گر است.

گزینه «۳»: $\gamma(G)$ عدد احاطه‌گری گراف است و منحصر به فرد است. (توجه کنید $\gamma(G)$ را با $\gamma-$ مجموعه اشتباه نگیرید. $\gamma-$ مجموعه لزومـاً منحصر به فرد نیست.)

گزینه «۴»: این گزینه نادرست است. گراف G با p رأس عدد احاطه‌گری p دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس دوم)

۵- گزینه «۳» ـ در گراف $G$ درجه رأس $V$ را برابر $\delta = ۵$ فرض می‌کنیم، چون $\deg_G^{(V)} + \deg_{\overline{G}}^{(V)} = P - ۱$ پس:

$$\deg_{\overline{G}}^{(V)} = ۱۳ - ۵ = ۸$$

این عدد (۸) همان $\Delta$ در $\overline{G}$ است. (چون هر چقدر درجه یک رأس در $G$ کمتر شود درجه آن در $\overline{G}$ بیشتر می‌شود.)

اکنون در گراف $\overline{G}$ به‌دست می‌آید.

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil \le |D| \Rightarrow \left\lceil \frac{۱۴}{۹} \right\rceil \le |D| \Rightarrow ۲ \le |D|$$

بنابراین کران پایین برابر ۲ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم)

۶- گزینه «۴» ـ چون $|D| \ge \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ و $C_{۱۰}$ گرافی از مرتبه ۱۰ با ماکزیمم درجه ۲ است. پس:

$$\gamma(C_{۱۰}) \ge \left\lceil \frac{۱۰}{۲+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۳} \right\rceil = ۴$$

درنتیجه هیچ مجموعه احاطه‌گر با ۳ عضو نداریم. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم)

۷- گزینه «۲» ـ فرض کنید:

$P$: عددهای طبیعی ۱ تا $n$ در $A$ باشند.

$q$: $n+۱$ در $A$ است.

با توجه به مجموعه‌های داده شده باید $p \Rightarrow q$ درست باشد تا این خاصیت برقرار باشد. پس گزینه‌ای که با توجه به اعضای آن $(p \Rightarrow q)$ نادرست است، این خاصیت را ندارد.

بررسی گزینه «۱»: واضح است که در آن این خاصیت وجود دارد.

بررسی گزینه «۲»: در این مجموعه ۳ و ۲ و ۱ وجود دارد (فرض کنید $n = ۳$) بنابر خاصیت ذکر شده باید $n+۱ = ۴$ هم در این مجموعه باشد و این اتفاق نمی‌افتد. پس این مجموعه خاصیت را ندارد.

بررسی گزینه‌های «۳» و «۴»: درهر دو گزینه به‌ازای هیچ عدد طبیعی $n$ عددهای ۱ تا $n$ در مجموعه‌ها نیستند پس $p$ در هر دو مورد نادرست است و به انتفای مقدم $p \Rightarrow q$ درهر دو درست است و خاصیت را دارند. (هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ درس اول)

۸- گزینه «۳» ـ بررسی گزینه «۱»: این گزاره می‌گوید $\exists n \in \mathbb{N} ; (۲^n + ۱ \in P)$. یعنی عدد طبیعی وجود دارد که به ازای آن $۲^n + ۱$ عددی اول است. چون $۲^n + ۱$ به ازای $n = ۱$ برابر ۳ است پس این گزینه درست است.

بررسی گزینه «۲»: این گزاره می‌گوید، برای هر عدد حقیقی، عددی حقیقی وجود دارد که از آن کوچک‌تر است. این گزاره نشان‌دهنده عدم وجود عضو ابتدا در اعداد حقیقی است و این گزاره‌ای درست است.

بررسی گزینه «۳»: در این گزینه کافی است $y$ را عددی بزرگ‌تر از $\sqrt{۵}$ قرار دهیم. دراین‌صورت هیچ $x$ای پیدا نمی‌شود که در رابطه $x^۲ + y^۲ \le ۵$ صدق کند:

مثلاً فرض کنید $y = ۳ \Rightarrow x^۲ + ۹ \le ۵ \Rightarrow x^۲ \le -۴ \Rightarrow$ هیچ مقداری برای $x$ به‌دست نیامد.

بررسی گزینه «۴»: واضح است که اگر $x \in \mathbb{N}$ آن‌گاه $x^۲ \in \mathbb{N}$ و در نتیجه $x^۲ + ۱ \in \mathbb{N}$ پس این گزاره درست است.

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ درس اول)

۹- گزینه «۲» ـ به هر زیرمجموعه از $A$ می‌توان، کدی ۵ رقمی از ۰ و ۱ را متناظر کرد. اگر این زیرمجموعه از $A$ اعضای $a$ را داشته و $b$ را نداشته باشد، در این‌صورت کُد متناظر با این زیرمجموعه رقم اول برابر ۱ و رقم دوم برابر ۰ است. مثلاً کُد زیرمجموعه $B = \{a , \{a\}, \{b\}\}$ به‌صورت (۱۰۱۱۰) است. در نتیجه برای شمارش این زیرمجموعه‌ها کافی است تعداد کدهای ۵ رقمی با ۰ و ۱ را پیدا کنیم که رقم اول آن‌ها ۱ و رقم دوم آن‌ها ۰ است. تعداد این کُدها برابر است با:

| رقم پنجم | رقم چهارم | رقم سوم | رقم دوم | رقم اول |
|---|---|---|---|---|
| $۲ = ۲^۳ = ۸$ | ۲ | ۲ | ۱ | ۱ |

(توجه کنید که چون رقم‌های اول و دوم در این کُدها مشخص‌اند، پس برای هر کدام فقط یک انتخاب وجود دارد.)

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ درس دوم)

۱۰- گزینه «۳» ـ چون $\mathbb{Z}$ به $A$، $B$ و $C$ افراز شده است، پس هر عدد صحیح که به $A$ یا $B$ تعلق نداشته باشد حتماً به $C$ تعلق دارد. چون

$$۶۴ = ۶ \times ۱۱ - ۲$$

$$۵۷ = ۶ \times ۹ + ۳$$

$$۶۹ = ۶ \times ۱۱ + ۳$$

پس ۶۴ به $A$ تعلق دارد و ۵۷ و ۶۹ به $B$ تعلق دارد ولی ۵۰ به هیچ‌یک از $A$ و $B$ تعلق ندارد، پس $۵۰ \in C$.

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ درس دوم)

۱۱- گزینه «۱» ـ عبارت داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$(A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A']) =$$

جذب:

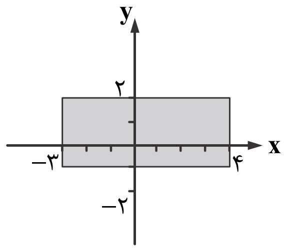
$$= \underbrace{(A \cap B')}_{x} \cup (\underbrace{(A \cap B')}_{x} \cap [\underbrace{(B - A) \cup A'}_{y}]) = A \cap B' = A - B$$

بنابراین مجموعه داده شده برابر:

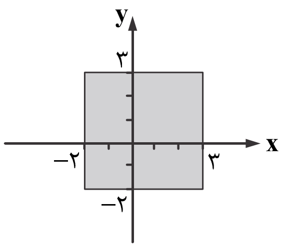
$$A - B = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$$

یعنی $A - B$ دارای ۵ عضو است. (هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ درس سوم)

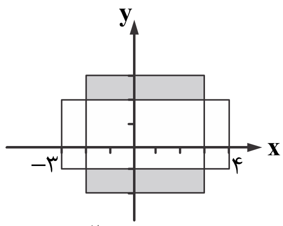
۱۲- گزینه «۲» ـ مجموعه‌های $A^2$ ، $B\times C$ و سپس $A^2 - B\times C$ را رسم می‌کنیم:




$B\times C$




$A^2 = A\times A$




$A^2 - (B\times ۳)$

اکنون به‌سادگی مساحت محدوده موردنظر را به‌دست می‌آوریم:

$$S = ۲\times(۱\times ۵) = ۱۰$$

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل اول ـ درس سوم)