

ریاضی و آمار ۲

گزینه ۱ - «۱»

۸- گزینه «۳» - اگر توابع f و g به صورت گزینه‌های «۱» و «۲» باشد، در این صورت نمودار تابع $f + g$ به صورت داده شده نخواهد بود، همچنین نمودار دارای ۳ قسمت است، پس حتماً یکی از تابع‌ها چندضابطه‌ای است، بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» رد می‌شوند. از بین گزینه‌های «۳» و «۴» نیز گزینه «۳» پاسخ است، چون سهمی داده شده در نمودار $f + g$ رو به بالاست، بنابراین داریم:

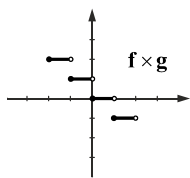
$$f(x) = x^2, g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ x^2 + 0 & x = 0 \\ x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع - نمودار) (متوسط)
گزینه ۲ - «۳»

$$f(x) = [x]: -2 \leq x < 2, g(x) = -1$$

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\Rightarrow [x] = -2 \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \end{aligned} \Rightarrow (f \times g)(x) = \begin{cases} 2 & -2 \leq x < -1 \\ 1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



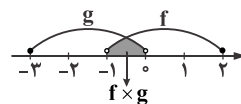
(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع - نمودار) (متوسط)
گزینه ۴ - «۴» - با استفاده از نمودارهای داده شده داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 1 - (-1) & x > 0 \\ -1 - 1 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f-g)(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع - نمودار) (متوسط)



$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g \Rightarrow D_{f \times g} = -1 < x < 0$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x-2)(x+2) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (f \times g)(x) = x^2 - 4$$

$$\# D_{f-g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \Rightarrow D_{f-g} = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (متوسط)
گزینه ۲ - «۳»

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \Rightarrow D_{f-g} = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow D_{f-g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{-1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (آسان)
گزینه ۲ - «۲»

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g, D_f = \mathbb{R}, D_g = \{-1, -2, -3\}$$

$$D_{f-g} = \mathbb{R} \cap \{-1, -2, -3\} = \{-1, -2, -3\}$$

$$f(x) = |x| \Rightarrow f(-1) = |-1| = 1, f(-2) = 2, f(-3) = 3$$

$$g(-1) = 0, g(-2) = 1, g(-3) = -2$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow f(-1) - g(-1) = 1 - 0 = 1$$

$$f(-2) - g(-2) = 2 - 1 = 1, f(-3) - g(-3) = 3 - (-2) = 5 \Rightarrow$$

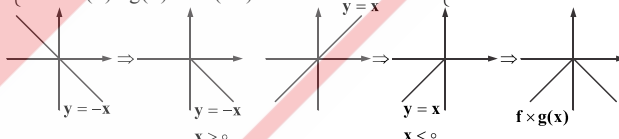
$$f-g = \{(-1, 1), (-2, 1), (-3, 5)\}$$

(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع) (دشوار)
گزینه ۴ - «۱»

$$f(x) = \text{sign}(x) \xrightarrow{\text{تابع علامت}} f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ضابطه این دو تابع را در محدوده‌های $x > 0$, $x = 0$ و $x < 0$ در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x > 0: f(x) \times g(x) = 1 \times (-x) = -x \\ x < 0: f(x) \times g(x) = (-1) \times (-x) = x \Rightarrow (f \times g)(x) = \begin{cases} -x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x < 0 \end{cases} \\ x = 0: f(x) \times g(x) = 0 \times (-x) = 0 \end{cases}$$



(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع - نمودار) (متوسط)
گزینه ۴ - «۴»

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$x > 0: \frac{g}{f} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$x < 0: \frac{g}{f} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

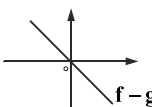
(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع - نمودار) (متوسط)

گزینه ۲ - «۲» - با توجه به نمودارهای داده شده نتیجه می‌گیریم که:

$$f(x) = -x - 1, g(x) = -1 \Rightarrow (f-g)(x) = f(x) - g(x) =$$

$$-x - 1 - (-1) = -x - 1 + 1 = -x$$

$$\Rightarrow (f-g)(x) = -x$$



(اکبری) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع - نمودار) (آسان)

گزینه ۴ - «۴» - ابتدا ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست می‌آوریم.

با استفاده از نقاط روی نمودار، معادله خط را به دست می‌آوریم:

$$(0, 0) \Rightarrow m = \frac{2-0}{-1-0} = -2, (0, 0) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 0) \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -2x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow -2x = \frac{-x^2}{g(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{-x^2}{-2x} = \frac{1}{2}x$$

$$\# D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

(تمرین ۴ صفحه ۵۲ کتاب درسی با تغییر) (فصل دوم - درس ۳ - اعمال بر روی توابع - نمودار) (متوسط)