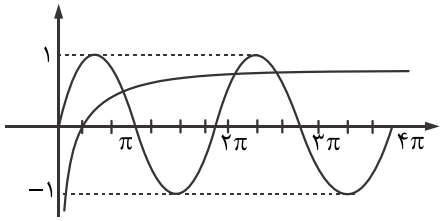
ریاضی ۲

۱- گزینه «۳» ـ نمودار دو تابع $y=\sin x$ و $y=\log x$ را در یک محور مختصات رسم کرده و تعداد نقاط تلاقی دو نمودار را در می‌یابیم.



چون پس از $x=10$ مقدار $\log x$ از یک بیشتر می‌شود، بنابراین این دو نمودار تا $+\infty$ هیچ نقطه تلاقی دیگری ندارد.

(الله‌دادی) (فصول چهارم و پنجم ـ درس سوم ـ لگاریتم و مثلثات)

۲- گزینه «۱» ـ

$$\tan(5\pi-\frac{\pi}{3})=\tan(4\pi+(\pi-\frac{\pi}{3}))=\tan(\pi-\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3} \Rightarrow \tan^2(\pi-\frac{\pi}{3})=3$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=\frac{3}{4}$$

$$\tan(\pi+\frac{\pi}{4})=\tan(\frac{\pi}{4})=1$$

$$\sin(\pi+\frac{\pi}{4})=-\sin(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2(\pi+\frac{\pi}{4})=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

$$\log_2\frac{3+4\times\frac{3}{4}-2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=x-1 \Rightarrow \log_2\frac{3+3-2}{1}=x-1 \Rightarrow 2^{x-1}=4 \Rightarrow 2^{x-1}=2^2 \Rightarrow 2=x-1 \Rightarrow x=3$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم و پنجم ـ درس سوم ـ ترکیبی)

۳- گزینه «۲» ـ

$$\log_{0/1}(\log_3\log_4(5x-1))=0 \Rightarrow \log_3(\log_4(5x-1))=(0/1)^0=1 \Rightarrow \log_4(5x-1)=3^1 \Rightarrow 5x-1=64$$
$$\Rightarrow 5x=65 \Rightarrow x=13$$

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ حل معادلات لگاریتمی)

۴- گزینه «۱» ـ اگر نقاط (۲ , ۴) و (۱ , ۳) روی وارون تابع قرار گرفته باشند، آن‌گاه نقاط (۴ , ۲) و (۳ , ۱) روی خود تابع قرار دارند.

$$3=a+\cancel{\log_b 1}^{0} \Rightarrow a=3 \,,\, 4=a+\log_b 2 \Rightarrow 4=3+\log_b 2 \Rightarrow 1=\log_b 2 \Rightarrow b=2$$

$$y=3+\log_2 x \Rightarrow y=\log_2 2^3+\log_2 x \Rightarrow y=\log_2 8x$$

حال وارون این تابع برابر است با:

$$8y=2^x \Rightarrow y=\frac{2^x}{2^3}=2^{x-3}$$

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ وارون تابع نمایی)

۵- گزینه «۴» ـ اگر قرار دهیم $\log_b a=x$، بنابراین $b^x=a$، حال لگاریتم طرفین تساوی را در مبنای عدد حقیقی C و $(c\neq 1)$ می‌نویسیم:

$$b^x=a \Rightarrow \log_c b^x=\log_c a \Rightarrow x\log_c b=\log_c a \Rightarrow x=\frac{\log_c a}{\log_c b} \Rightarrow \log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\log_{72}12=\frac{\log_2 12}{\log_2 72}=\frac{\log_2 3\times 4}{\log_2 9\times 8}=\frac{\log_2 3+2\log_2 2}{2\log_2 3+3\log_2 2}=\frac{\log_2 3+2}{2\log_2 3+3}=\frac{2+\alpha}{3+2\alpha}$$

از مقایسه طرفین نتیجه می‌گیریم: $\log_2 3=\alpha$

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ ویژگی‌های لگاریتم (حاصل جمع دو لگاریتم))

۶- گزینه «۲» ـ

$$g(x)=f(x) \Rightarrow 2^{x^2-3x}=4^{2x-3} \Rightarrow 2^{x^2-3x}=2^{4x-6} \Rightarrow x^2-3x=4x-6 \Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow x=1,6$$

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس اول ـ حل معادلات نمایی)

۷- گزینه «۳» ـ موارد «الف» و «ج» نادرست‌اند. دو نمودار $x^۲$ و ۳^x در سه نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

برای آن‌که دو نمودار $(a+۱)^{-x}$, $(۵-a)^x$ نسبت به محور yها قرینه باشند، باید داشته باشیم:

$$۵-a=a+۱ \Rightarrow ۴=۲a \Rightarrow a=۲$$

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ رسم نمودار تابع نمایی و لگاریتم، لگاریتم یک عدد و قرینه دو تابع نمایی نسبت به محور yها)

۸- گزینه «۲» ـ

$$\frac{۱}{۲}\log_{x-۱}(x^۲-۶x+۹)-\log_{x-۱}(x^۲-\frac{۱۷}{۳}x+۷)=\log_{x-۱}۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{x-۱}(x-۳)^۲-\log_{x-۱}(x^۲-\frac{۱۷}{۳}x+۷)=\log_{x-۱}۳$$

$$\Rightarrow \log_{x-۱}x-۳-\log_{x-۱}(x^۲-\frac{۱۷}{۳}x+۷)=\log_{x-۱}۳ \Rightarrow \log_{x-۱}\frac{x-۳}{x^۲-\frac{۱۷}{۳}x+۷}=\log_{x-۱}۳$$

$$\Rightarrow \frac{x-۳}{x^۲-\frac{۱۷}{۳}x+۷}=۳ \Rightarrow x-۳=۳x^۲-۱۷x+۲۱ \Rightarrow ۳x^۲-۱۸x+۲۴=۰$$

$$x=\frac{۱۸\pm\sqrt{۳۲۴-۴\times۳\times۲۴}}{۶}=\begin{cases}۴ \text{ ق . ق}\\ ۲ \text{ غ . ق}\end{cases}$$

بنابراین باید به عدد ۴، ۴ واحد دیگر بی‌افزاییم.

$$\log_۲ x=۳ \Rightarrow x=۸$$

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی)

۹- گزینه «۳» ـ نقاط $(۱,۰)$ و $(۰,\frac{۲}{۳})$ روی نمودار قرار دارند:

$$f(۱)=۰ \Rightarrow a-۳^{۱+b}=۰$$

$$f(۰)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow a-۳^b=\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳^b-۳^{۱+b}=\frac{-۲}{۳} \Rightarrow ۳^b(۱-۳)=\frac{-۲}{۳} \Rightarrow ۳^b=\frac{۱}{۳} \Rightarrow b=-۱, a-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=۱$$

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس اول ـ معادله کلی تابع نمایی)

۱۰- گزینه «۳» ـ از طرفین لگاریتم در مبنای ۳ می‌گیریم:

$$\log_۳ x\log_۳ x=\log_۳ ۸۱ \Rightarrow \log_۳ x\log_۳ x=۴ \Rightarrow (\log_۳ x)^۲=۲^۲ \Rightarrow \log_۳ x=۲ \Rightarrow x=۹ \text{ یا } \log_۳ x=-۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ لگاریتم یک عدد)

۱۱- گزینه «۳» ـ

$$(\log_۶(x-۲))^۲-(\log_۶(x-\frac{۱}{۲}))^۲=۰ \Rightarrow (\log_۶(x-۲)-\log_۶(x-\frac{۱}{۲}))(\log_۶(x-۲)+\log_۶(x-\frac{۱}{۲}))=۰$$

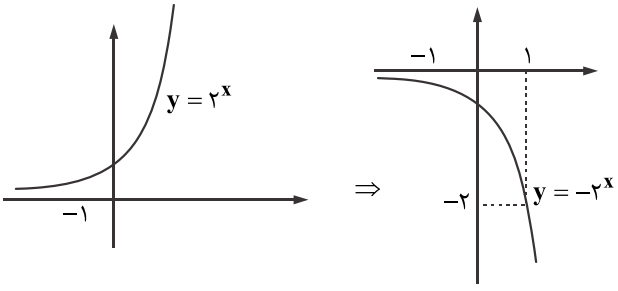
$\log_۶(x-۲)-\log_۶(x-\frac{۱}{۲})=۰ \Rightarrow \log_۶\frac{x-۲}{x-\frac{۱}{۲}}=۰ \Rightarrow ۶^۰=\frac{x-۲}{x-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \frac{x-۲}{x-\frac{۱}{۲}}=۱ \Rightarrow x-۲=x-\frac{۱}{۲} \Rightarrow$ معادله جواب ندارد. یا

$\log_۶(x-۲)+\log_۶(x-\frac{۱}{۲})=۰ \Rightarrow \log_۶(x-۲)(x-\frac{۱}{۲})=۰$ یا

$$۶^۰=(x-۲)(x-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow x^۲-\frac{۱}{۲}x-۲x+۱=۱ \Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۲}x=۰ \Rightarrow x(x-\frac{۵}{۲})=۰ \Rightarrow x=۰,\frac{۵}{۲}, x=۰ \text{ ق . ق}, x=\frac{۵}{۲} \text{ غ . ق}$$

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ حاصل جمع و تفریق دو لگاریتم)

۱۲- گزینه «۲» ـ نمودار تابع -۲^x را رسم می‌کنیم:



مشاهده می‌شود برد تابع $(-\infty, ۰)$ است

(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس اول ـ تعیین برد تابع نمایی از روی نمودار)

۱۳- گزینه «۲» ـ

$$\log_۳ y+۳=۱+\log_۳ x \Rightarrow \log_۳ y+۳-\log_۳ x=\log_۳ ۳ \Rightarrow \log_۳ \frac{y+۳}{x}=\log_۳ ۳ \Rightarrow \frac{y+۳}{x}=۳$$

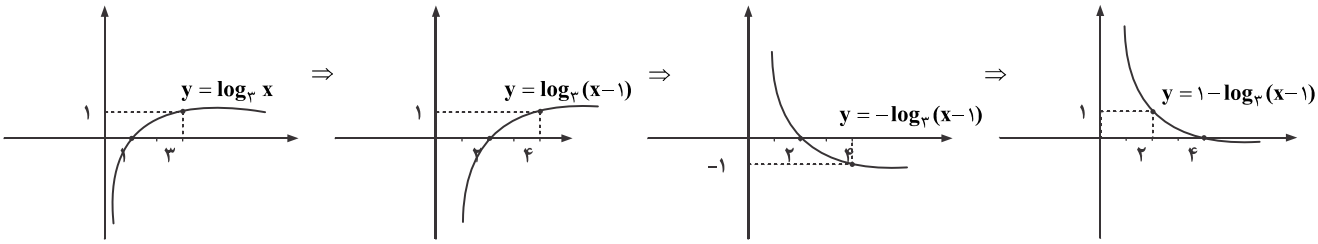
$$\Rightarrow y+۳=۳x \Rightarrow y=۳x-۳ \Rightarrow y^۲-x^۲=(۳x-۳)^۲-x^۲=۹x^۲+۹-۱۸x-x^۲=۲۷$$

$$\Rightarrow ۸x^۲-۱۸x+۹=۲۷ \Rightarrow ۸x^۲-۱۸x-۱۸=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۸\pm\sqrt{(۱۸)^۲+۴\times۸\times۱۸}}{۱۶}=\begin{cases}۳ \text{ ق} \cdot \text{ ق}\\ \frac{-۳}{۴} \text{ غ} \cdot \text{ ق}\end{cases}$$

$$x=۳, y=۳\times۳-۳=۶ \Rightarrow \log_۳ ۶+۳=۲$$

(سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۹) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ حاصل جمع و تفریق تابع لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی)

۱۴- گزینه «۳» ـ نقاط (۰ , ۴) و (۱ , ۲) در ضوابط موجود در گزینه‌های «۴» و «۳» صدق می‌کنند.



(الله‌دادی) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ نمودار تابع لگاریتمی)

۱۵- گزینه «۴» ـ

$$\log \frac{۲۵۰۰}{\sqrt[۴]{۲۷}}=\log ۲۵۰۰-\log \sqrt[۴]{۲۷}=\log ۲۵\times۱۰۰-\log ۳^{\frac{۳}{۴}}=۲\log ۵+۲\log ۱۰-\frac{۳}{۴}\log ۳=۲\times۰/۷+۲-\frac{۳}{۴}\times۰/۴=۳/۱$$

(آزاد ریاضی ـ ۹۱) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ حاصل جمع لگاریتم)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$۳^{x-۵}\times۹^{y-۳x}=۱ \Rightarrow ۳^{x-۵}\times۳^{۲y-۶x}=۳^۰ \Rightarrow ۳^{۲y-۵x-۵}=۳^۰ \Rightarrow ۲y-۵x-۵=۰ \Rightarrow ۲y-۵x=۵$$

$$\log y=\log ۳+\log ۵+\log x \Rightarrow \log y-\log x=\log ۳+\log ۵ \Rightarrow \log \frac{y}{x}=\log ۱۵ \Rightarrow \frac{y}{x}=۱۵ \Rightarrow y=۱۵x$$

$$۲(۱۵x)-۵x=۵ \Rightarrow ۲۵x=۵ \Rightarrow x=\frac{۱}{۵} \Rightarrow ۲y=۵+۵\times\frac{۱}{۵} \Rightarrow y=۳$$

(سراسری تجربی ـ ۹۶) (فصل پنجم ـ دروس اول و دوم ـ حل معادلات نمایی و لگاریتمی)

۱۷- گزینه «۳» ـ

$$\sin ۱۶۵^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ)=\sin(۱۵^\circ), \cos(۱۰۵^\circ)=\cos(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$$

$$\cos(۳۷۵^\circ)=\cos(۳۶۰^\circ+۱۵^\circ)=\cos(۱۵^\circ), \cos(۷۵^\circ)=\cos(۹۰^\circ-۱۵^\circ)=\sin ۱۵^\circ$$

$$A=\frac{۳\sin(۱۵^\circ)-۲\sin(۱۵^\circ)}{۴\cos ۱۵^\circ+\sin(۱۵^\circ)} \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{بر } \cos(۱۵^\circ)} A=\frac{۳\tan(۱۵^\circ)-۲\tan(۱۵^\circ)}{۴+\tan(۱۵^\circ)}=\frac{a-۱}{۴+a-۱}=\frac{a-۱}{a+۳}$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی)

۱۸- گزینه «۳» ـ

$$۱) \sin(x-\frac{\pi}{۲})\cos(x-\frac{\pi}{۲})=-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=-\sin x\cos x>۰$$

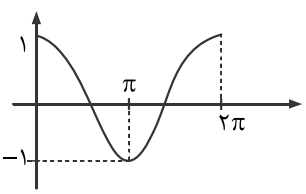
$$۲) \sin(x+\frac{\pi}{۲})\cos(x-\frac{\pi}{۲})=\sin(x+\frac{\pi}{۲})\cos(-(\frac{\pi}{۲}-x))=\sin(x+\frac{\pi}{۲})\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\cos x\sin x<۰$$

$$۳) \sin(x+\frac{\pi}{۲})\cos(x+\frac{\pi}{۲})=\cos x.(-\sin x)=-(\sin x\cos x)>۰$$

$$۴) \sin(x-\frac{\pi}{۲})\cos(x+\frac{\pi}{۲})=\sin(-(\frac{\pi}{۲}-x))\cos(\frac{\pi}{۲}+x)=-\cos x\times(-\sin x)=\sin x\cos x<۰$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی متمم)

۱۹- گزینه «۳» ـ نمودار $y=\cos x$ به‌صورت زیر است:



با مقایسه نمودار داده شده و نمودار $y=\cos x$ متوجه می‌شویم که نمودار فقط یک واحد به سمت بالا منتقل شده است، پس نمودار داده شده مربوط به $y=۱+\cos x$ است. (الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس سوم ـ رسم تابع کسینوس)

۲۰- گزینه «۴» ـ

$$y = (\frac{۳a-۵}{۴})^{-x} = (\frac{۴}{۳a-۵})^{x} \xrightarrow{a \text{ عددی حقیقی و مثبت و مخالف یک}}$$

$۴ > ۰$ است. بنابراین $۳a-۵ > ۰$ باید باشد.

$$\Rightarrow ۳a-۵ > ۰ \Rightarrow a > \frac{۵}{۳}$$

$$\frac{۴}{۳a-۵} > ۰ \Rightarrow \frac{۴}{۳a-۵} \neq ۱ \Rightarrow ۴ \neq ۳a-۵ \Rightarrow ۹ \neq ۳a \Rightarrow a \neq ۳ \Rightarrow a \text{ حدود} = (\frac{۵}{۳}, +\infty) - \{۳\}$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس سوم ـ رسم تابع کسینوس)