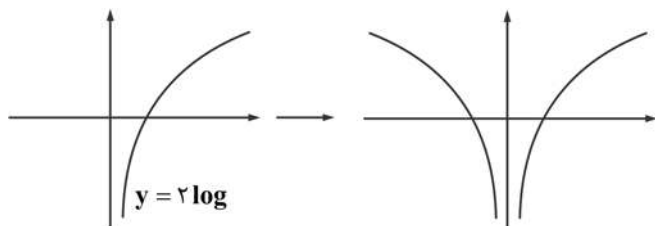


حسابان ۱

۱- گزینه «۳» -

$$y = \log x^2 = 2 \log |x|$$

کافی است $f(x) = 2 \log x$ را رسم کنیم، سپس $f(|x|)$ را رسم کنیم.



(گروه مؤلفان علوی) (فصل سوم - درس دوم - تابع لگاریتمی) (متوسط)

۲- گزینه «۱» -

$$\left. \begin{aligned} f(15) = 2 &\Rightarrow \log_b(15+a) = 2 \Rightarrow b^2 = a+15 \\ f(3) = 1 &\Rightarrow \log_b(3+a) = 1 \Rightarrow b = a+3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + 5a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \xrightarrow{b > 0} b = 4 \Rightarrow a + b = 5 \\ a = -6 \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

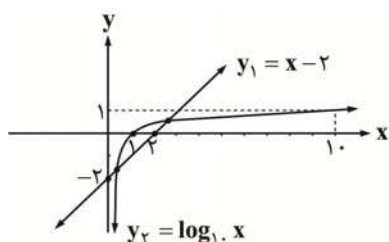
(گروه مؤلفان علوی) (فصل سوم - درس دوم - تابع لگاریتمی) (دشوار)

۳- گزینه «۱» -

$$\log_{\sqrt{27}} = \log_{27}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_{27} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\log_{27}} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\log_3 + \log_3} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1 + \log_3 + \log_3} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1 + a + \frac{1}{b}} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{b}{ab + b + 1} \right)$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل سوم - درس سوم - ویژگی‌های لگاریتم) (دشوار)

۴- گزینه «۳» - از روش هندسی کمک می‌گیریم:



$$\frac{x-2}{y_1} = \frac{\log_{10} x}{y_2}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، نمودارها یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند پس معادله $y_1 = y_2$ دارای دو جواب حقیقی است.

(گروه مؤلفان علوی) (فصل سوم - درس دوم - تابع لگاریتمی) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -

$$\log(x+1) = \log \frac{12}{x} \Rightarrow x+1 = \frac{12}{x} \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

$$x = 3 \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{27}}(3+24) = \log_{\frac{3}{2}} 27 = \log_{\frac{3}{2}} 3^3 = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل سوم - درس سوم - ترکیبی) (متوسط)

۶- گزینه «۲» - به طور کلی زمانی که پارامتر x به توان یک عبارت لگاریتمی بر مبنای آن پارامتر برسد، یعنی $x^{\log_x \alpha}$ می‌توانیم نتیجه

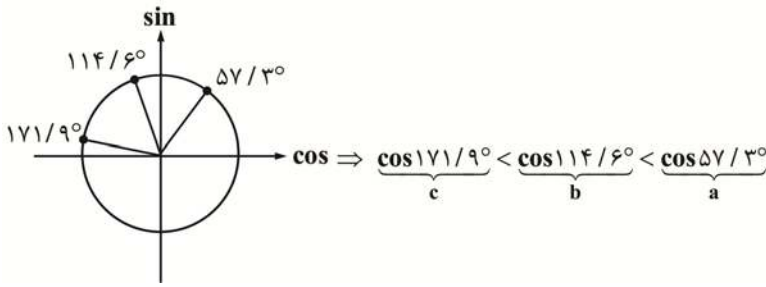
$$x^{\log_x \alpha} = \alpha \text{ بگیریم}$$

$$\log x = t \Rightarrow t^2 = 2+t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = -1 \text{ (غ ق ق)} \\ \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100 \end{cases}$$

بنابراین معادله یک جواب دارد. (گروه مؤلفان علوی) (فصل سوم - درس سوم - ترکیبی) (دشوار)

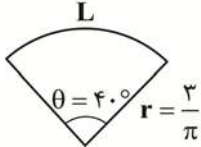
۷- گزینه «۱» -

۱ رادیان $\approx 57/3^\circ$ ۲ رادیان $\approx 114/6^\circ$ ۳ رادیان $\approx 171/9^\circ$



(گروه مؤلفان علوی) (فصل چهارم - درس اول - رادیان) (آسان)

۸- گزینه «۲» -



$$\theta = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow L = r\theta \Rightarrow L = \frac{3}{\pi} \times \frac{2\pi}{9} = \frac{2}{3} = 0.67 \text{ متر}$$

$$\Rightarrow L \approx 67 \text{ cm}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل چهارم - درس اول - رادیان) (آسان)

۹- گزینه «۱» -

$$S = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta = \frac{r^2}{2} (\theta - \sin \theta) = 2(\theta - \sin \theta)$$

مثلاً S - قطاع رنگی

(گروه مؤلفان علوی) (فصل چهارم - درس اول - رادیان) (دشوار)

۱۰- گزینه «۱» -

$$\frac{\tan 17^\circ \tan(90^\circ - 17^\circ)}{-\tan(180^\circ - 54^\circ) \cot 54^\circ} = \frac{\tan 17^\circ \cot 17^\circ}{-\tan(54^\circ) \cot 54^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل چهارم - درس دوم - ترکیبی) (آسان)

۱۱- گزینه «۳» -

$$-\sin x + \frac{1}{2} = \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{15}{16}$$

$$\xrightarrow[\cos x < 0]{\text{در ربع دوم}} \cos x = \frac{-\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \tan(x - \pi) = \tan x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{-\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل چهارم - درس دوم - ترکیبی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» -

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2\cos^2 x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2\cos^2 x - 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow R_f = [-1, 1]$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل چهارم - درس سوم - توابع مثلثاتی) (آسان)

۱۳- گزینه «۳» - (گروه مؤلفان علوی) (فصل چهارم - درس سوم - توابع مثلثاتی) (آسان)

۱۴- گزینه «۲» -

$$\frac{2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha} - \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\sin^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - \cot \alpha = 3^2 - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل چهارم - درس چهارم - ترکیبی) (متوسط)

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \xrightarrow[\cos \alpha > 0]{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \beta = 2 \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} \xrightarrow[\cos \beta < 0]{\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}} \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = -\frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} > 0 \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{-2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} - \frac{2}{3\sqrt{5}} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ربع دوم}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل چهارم - درس چهارم - ترکیبی) (متوسط)

$$(\frac{9}{10})^t \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (q \text{ مقدار اولیه})$$

$$\Rightarrow (\frac{9}{10})^t = \frac{1}{2} \xrightarrow{\log} t(\log 9 - \log 10) = \log \frac{1}{2} \Rightarrow t(1.954 - 1) = -0.301 \Rightarrow t = 21/5$$

(سراسری ریاضی - ۹۷) (فصل سوم - درس سوم - کاربرد لگاریتم) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» - ابتدا مسافت طی شده توسط قرقره بزرگ را می‌یابیم که برابر است با:

$$\frac{5\pi}{6} \times 12 \text{ cm} = 10\pi \text{ cm}$$

قرقره کوچک نیز $10\pi \text{ cm}$ را طی می‌کند و چون شعاع قرقره کوچک تر 9 cm است، اندازه این فاصله طی شده را بر حسب رادیان می‌یابیم.

رادیان

$$\frac{1}{x} \cdot 9 \text{ cm} \Rightarrow x = \frac{10\pi \text{ رادیان}}{9} = \frac{10 \times 180^\circ}{9} = 200^\circ$$

(کتاب همراه علوی) (فصل چهارم - درس اول - رادیان) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» - با استفاده از رابطه $\tan(\frac{\pi}{4} - \theta) = \cot \theta$ صورت مسأله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 + \tan 1^\circ} + \frac{1}{1 + \tan 2^\circ} + \dots + \frac{1}{1 + \tan 44^\circ} + \dots + \frac{1}{1 + \cot 2^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 1^\circ} \\ &= \frac{1}{1 + \tan 1^\circ} + \frac{1}{1 + \tan 2^\circ} + \dots + \frac{1}{2} + \dots + \frac{\tan 2^\circ}{\tan 2^\circ + 1} + \frac{\tan 1^\circ}{\tan 1^\circ + 1} = \frac{1 + \tan 1^\circ}{1 + \tan 1^\circ} + \frac{1 + \tan 2^\circ}{1 + \tan 2^\circ} + \dots + \frac{1 + \tan 44^\circ}{1 + \tan 44^\circ} + \frac{1}{2} \\ &= \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{17 \text{ تا } 44} + \frac{1}{2} = 44 + \frac{1}{2} = 44.5 \end{aligned}$$

(کتاب همراه علوی) (فصل چهارم - درس دوم - نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم) (دشوار)

۱۹- گزینه «۱» - نقطه $(0, 2)$ روی نمودار واقع شده است، بنابراین:

$$(0, 2) \Rightarrow 2 = a \sin \pi(\frac{1}{4} + 0) \Rightarrow 2 = a \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2 = a \times 1 \Rightarrow a = 2$$

$$y = 2 \sin \pi(\frac{1}{4} + bx) \Rightarrow y = 2 \sin(\frac{\pi}{4} + b\pi x) \Rightarrow y = 2 \cos(b\pi x)$$

اما $(1, -2)$ نقطه مینیمم تابع است، لذا:

$$-2 = 2 \cos(b\pi(1)) \Rightarrow \underbrace{-1}_{\cos \pi} = \cos(b\pi) \Rightarrow \pi = b\pi \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a \cdot b = 2 \times 1 = 2$$

(سراسری ریاضی - ۹۲) (فصل چهارم - درس سوم - توابع مثلثاتی) (دشوار)

۲۰- گزینه «۲» - فرض کنید $\alpha = ۲۰^\circ$ ، بنابراین:

$$\tan ۲۰^\circ(1 + \cos ۴۰^\circ) = \tan \alpha(1 + \cos ۲\alpha)$$

لذا:

$$\tan \alpha \underbrace{(1 + \cos ۲\alpha)}_{۲ \cos^2 \alpha} = ۲ \tan \alpha (\cos^2 \alpha) = \frac{۲ \sin \alpha}{\cos \alpha} (\cos^2 \alpha) = ۲ \sin \alpha \cos \alpha = \sin ۲\alpha \underline{\underline{= ۲۰^\circ}} \sin ۴۰^\circ$$

(کتاب همراه علوی) (فصل چهارم - درس چهارم - ترکیبی) (متوسط)